Corrigé du partiel de Novembre 2014

Exercice I

L'endomorphisme de Weingarten est l'endomorphisme de T_pS donné par $W = -dN$

On note (u_1°, u_2°) les coordonnées de $F^{-1}(p)$.

La courbe paramétrée $t \mapsto (u_1^\circ + t, u_2^\circ)$ a pour vecteur vitesse en $t=0$ le vecteur $\frac{\partial}{\partial u_1}$. Son image par F, $t \mapsto F(u_1^\circ + t, u_2^\circ)$ a pour vecteur vitesse en 0 le vecteur tangent en p à S, $dF_{(u_1^\circ, u_2^\circ)} \cdot \frac{\partial}{\partial u_1} = X_1$

Donc $W \cdot X_1 = -dN \cdot X_1 = -\frac{d}{dt} N(F(u_1^\circ + t, u_2^\circ))_{|t=0}$

$$I(W \cdot X_1, X_2) = \langle W \cdot X_1, X_2 \rangle = -\langle \frac{d}{dt} N(F(u_1^\circ + t, u_2^\circ))_{|t=0}, \frac{\partial F}{\partial u_2} \rangle$$

$$= -\frac{d}{dt} \langle N(F(u_1^\circ + t, u_2^\circ)), X_2 \rangle + \langle N(F(u_1^\circ + t, u_2^\circ)), \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial u_2}(u_1^\circ + t, u_2^\circ) \rangle_{|t=0}$$

$$= 0 + \langle N(p), \frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2}(F^{-1}(p)) \rangle$$

De façon générale

$$I(W \cdot X_i, X_j) = \langle N(p), \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(F^{-1}(p)) \rangle$$

Exercice 2

On utilise les notations de l'exercice précédent

Démarche : 1) On détermine un paramétrage F de $\mathcal{T}$ au voisinage du point p de coordonnées $(0,1,0)$.

2) On calcule la seconde forme fondamentale et sa matrice H dans la base (X_1, X_2)

$\mathrm{II}(X_i, X_j) = \mathrm{I}(WX_i, X_j)$ à l'aide de la formule $\mathrm{I}(WX_i, X_j) = \left\langle N, \dfrac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle$ où N est un champ de vecteurs normaux unitaires à déterminer.

3) Après avoir déterminé la matrice G de la première forme fondamentale, on détermine la matrice de W, notée aussi W par la formule $GW = H$

4) On calcule (les valeurs valeurs propres λ_1 et λ_2 de W)

et $K_{Gauss} = \lambda_1 \lambda_2 = \det W$

$K_{moyenne} = \dfrac{1}{2} \operatorname{trace} W$.

1) On considère l'application, pour $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ fixé.

$$F : \left]\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right[^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \sqrt{2}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

F est différentiable, $\operatorname{Image} F \subset \mathcal{T}$, $F(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Par les propriétés du paramétrage en coordonnées sphériques, $\operatorname{Im} F$ est tout un voisinage de p dans $\mathcal{T}$

$$X_1 = \frac{\partial F}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi \sin\theta \\ -\sqrt{2}\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$X_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix} \qquad X_2\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Donc $dF_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}$ est de rang 2.

Par les propriétés du paramétrage en coordonnées sphériques, F est un homéomorphisme local ~~[illegible]~~ sur un voisinage de p.

Donc F est un paramétrage de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ au voisinage de p.
$\mathcal{E}$ est donc une sous-surface différentiable au voisinage de p.

La matrice de la première forme fondamentale dans la base (X_1, X_2) en p est

$$G=\begin{pmatrix}\langle X_1, X_1\rangle & \langle X_1, X_2\rangle\\ \langle X_2, X_1\rangle & \langle X_2, X_2\rangle\end{pmatrix}=2\ \mathrm{Id}$$

2) Pour expliciter un champ de vecteurs normaux, on calcule

$$X_1\wedge X_2=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\sin^2\varphi\cos\theta\\-2\sin^2\varphi\sin\theta\\-\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi\end{pmatrix}=-\sqrt{2}\sin\varphi\begin{pmatrix}\sin\varphi\cos\theta\\\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta\\\cos\varphi\end{pmatrix}$$

Un champ de vecteurs normaux unitaire est donc

$$\frac{1}{\sqrt{\sin^2\varphi\,(\cos^2\theta+2\sin^2\theta)+\cos^2\varphi}}\begin{pmatrix}\sin\varphi\cos\theta\\\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta\\\cos\varphi\end{pmatrix}$$

dont la valeur en p est $N(p)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta \\ -\sqrt{2}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

et en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \varphi}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3) Comme $H = -\mathrm{Id}$ et $G = 2\mathrm{Id}$, on trouve $W = -\frac{1}{2}\mathrm{Id}$

4) $K_{Gauss} = \det W = \frac{1}{4}$

$K_{moyenne} = \frac{1}{2} \operatorname{trace} W = -\frac{1}{2}$

Autre solution de l'exercice 2

La démarche

1) On détermine un champ de vecteurs normaux unitaires N sur $\mathcal{T}$ à l'aide du gradient de l'équation

2) On différentie N dans les deux directions d'une base du tangent à $\mathcal{T}$ au point considéré, pour obtenir la matrice W de l'endomorphisme de Weingarten

3) On calcule le déterminant et la demi-trace de W pour obtenir la courbure de Gauss et la courbure moyenne.

1) $\mathcal{T}$ est la ligne de niveau 2 de l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto x^2 + 2y^2 + z^2$$

f est polynomiale donc différentiable

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

Or $(0,0,0) \notin \mathcal{T}$. Donc df est partout de rang 1 sur $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ est donc une sous-surface différentiable de $\mathbb{R}^3$.

$\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ z \end{pmatrix}$ est un champs de vecteurs normaux à $\mathcal{T}$, jamais nul.

$N(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ z \end{pmatrix}$ est donc un champs de vecteurs normaux unitaires sur $\mathcal{T}$.

2 – On note p le point de coordonnées $(0,1,0)$

$$T_p \Sigma = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f_{(0,1,0)}\right)^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\perp} = \text{Vect}\left(\vec{\imath}, \vec{k}\right) = \text{Vect}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(0,1,0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial N}{\partial z}(0,1,0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$W = -dN$ a pour matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{k})$ de $T_p \Sigma$

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

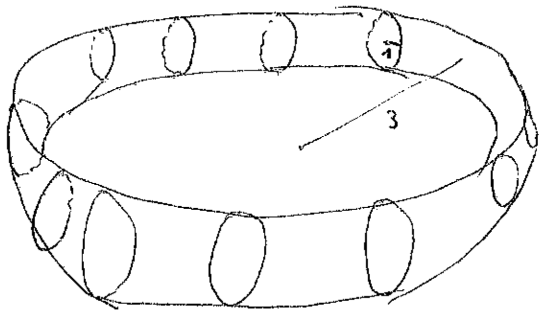
3 – $K_{Gauss}(0,1,0) = \det W = \dfrac{1}{4}$

$K_{moyenne}(0,1,0) = \dfrac{1}{2}\, \text{trace}\, W = \dfrac{1}{2}$

Exercice 3

1- • Sur $T_{ar} = \mathrm{Im}\, F$, $x^2+y^2 = (a+r\cos\phi)^2 > 0$ car $a>r>0$.
Donc T_{ar} ne rencontre pas l'axe $x=y=0$

• T_{ar} est un tore de révolution



• Les composantes de F sont trigonométriques : F est donc différentiable.

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = (a+r\cos\phi)\,\vec{v_\theta} \qquad\qquad \frac{\partial F}{\partial \phi} = -r\sin\phi\,\vec{u_\theta} + r\cos\phi\,\vec{k}$$

ont pour composante dans la base $(\vec{u_\theta}, \vec{v_\theta}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3_{ev}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -r\sin\phi \\ a+r\cos\phi & 0 \\ 0 & r\cos\phi \end{pmatrix}$$

Ils sont donc indépendants et dF est partout de rang 2.

• Si $F(\theta,\phi) = F(\theta',\phi')$ alors comme $a+r\cos\phi > 0$
$\vec{u_\theta} = \vec{u_{\theta'}}$ donc $\theta = \theta'\ [2\pi]$

Alors $\cos\phi = \cos\phi'$ et $\sin\phi = \sin\phi'$ donc $\phi = \phi'\ [2\pi]$

• Nous n'avons pas montré que F est un homéomorphisme sur son image.

2 - L'application E est polynomiale, donc différentiable.

C'est une équation de T_{ar}.

Reste à montrer que la différentielle de E est partout de rang 1 sur T_{ar}

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \cancel{2}4x\left(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2\right) - 8a^2x = 4x\left(x^2+y^2+z^2-a^2-r^2\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 4y\left(x^2+y^2+z^2-a^2-r^2\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 4z\left(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2\right)$$

Comme x et y ne sont pas simultanément nuls

$$\begin{matrix} dE = 0 \\ z \neq 0 \end{matrix} \iff \left\{\begin{matrix} x^2+y^2+z^2-a^2-r^2=0 \\ x^2+y^2+z^2+a^2-r^2=0 \end{matrix}\right. \iff \left\{\begin{matrix} x^2+y^2+z^2-a^2-r^2=0 \\ a^2=0 \end{matrix}\right.$$

n'a pas de solution

Sur $T_{ar} \cap \{z=0\}$ $\quad (x^2+y^2+a^2-r^2)^2 - 4a^2(x^2+y^2) = 0$

Si $dE=0$ alors $x^2+y^2=a^2+r^2$. On aurait

$$(a^2+r^2+a^2-r^2)^2 - 4a^2(a^2+r^2) = 0$$

soit $\quad 4a^4 - 4a^4 - 4a^2r^2 = 0 \quad$ contradiction.

Donc dE est partout de rang 1 sur T_{ar}.

Donc T_{ar} est une sous-surface différentiable de $\mathbb{R}^3$

3 – Les composantes de G sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc G est différentiable.

$$G(t,\theta,\phi) = F(\theta,\phi) + tr\,N(\theta,\phi)$$
$$= (a + r\cos\phi + tr\cos\phi)\,\vec{u_\theta} + r(1+t)\sin\phi\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = r\cos\phi\,\vec{u_\theta} + r\sin\phi\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = (a + r(1+t)\cos\phi)\,\vec{v_\theta}.$$

$$\frac{\partial G}{\partial \phi} = -r(1+t)\sin\phi\,\vec{u_\theta} + r(1+t)\cos\phi\,\vec{k}$$

La matrice de dG dans les bases $\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi}\right)$ et $(\vec{u_\theta}, \vec{v_\theta}, \vec{k})$

est en $t=0$

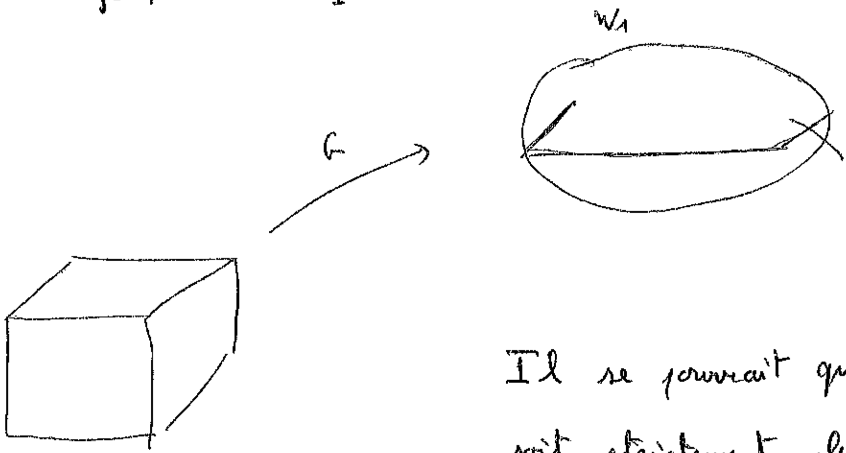
$$\begin{pmatrix} r\cos\phi & & -r\sin\phi \\ & a + r\cos\phi & \\ r\sin\phi & & r\cos\phi \end{pmatrix}$$

de déterminant $(a + r\cos\phi)\,r^2$ non nul.

Donc $dG_{(t_0,\theta_0,\phi_0)}$ est de rang 3 et par le théorème d'inversion local,

G est un difféomorphisme local.

4- Comme G est un difféomorphisme local, il existe $\delta_1 > 0$ tel que G soit un difféomorphisme de $]-\delta_1, \delta_1[\times]\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta[\times]\phi_0 - \delta, \phi_0 + \delta[$ sur son image, notée W_1.



Il se pourrait que $W_1 \cap T_{ar}$ soit strictement plus grand que $F(]\theta_0-\delta, \theta_0+\delta[\times]\phi_0 - \delta, \phi_0 + \delta[)$

$$G(t,\theta,\phi) \in W_1 \cap T_{ar} \iff \begin{cases} (t,\theta,\phi) \in]-\delta,\delta[\times]\theta_0-\delta,\theta_0+\delta[\times]\phi_0-\delta,\phi_0+\delta[\\ E(G(t,\theta,\phi)) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} (t,\theta,\phi) \in \text{———} \\ t(t+2)\left[4a\,(a+r(1+t)\cos\phi) + t(t+2)r^2\right] = 0 \end{array}$$

Quand $t = 0$ $\quad 4a\,(a+r(1+t)\cos\phi) + t(t+2)r^2 = 4a(a+r\cos\phi) > 0$
et $\phi \in [-\pi,\pi]$ compact

Donc il existe $\delta_1 > \delta > 0$ tel que si $t \in]-\delta,\delta[$ et $\phi \in [-\pi,\pi]$

$$4a(a+r(1+t)\cos\phi) + t(t+2)r^2 > 0.$$

Si de plus $\delta < 2$ $\quad t+2 > 0$ sur $]-\delta,\delta[$.

Alors en posant $W = G(]-\delta,\delta[\times]\theta_0-\delta,\theta_0+\delta[\times]\phi_0-\delta,\phi_0+\delta[)$
on trouve

$$G(t,\theta,\phi) \in W \cap T_{ar} \iff \begin{array}{l} (t,\theta,\phi) \in]-\delta,\delta[\times]\theta_0-\delta,\theta_0+\delta[\times]\phi_0-\delta,\phi_0+\delta[\\ t = 0 \end{array}$$

$$\iff G(t,\theta,\phi) \in F(]\theta_0-\delta,\theta_0+\delta[\times]\phi_0-\delta,\phi_0+\delta[)$$

Donc, puisque F est une restriction de G qui est un homéomorphisme, F réalise un homéomorphisme local sur un voisinage de chaque point dans T_{ar}.

5 – Comme F est différentiable à différentielle de rang 2, F réalise un paramétrage au voisinage de chaque point de T_{ar}.

Comme F est de plus injective sur $]-\pi, \pi[\times]-\pi, \pi[$,

F est un homéomorphisme de $]-\pi, \pi[\times]\pi, \pi[$ sur son image qui est $T_{ar} - \left(\{ x \cancel{<} 0 , y = 0 \} \cup \{ x^2 + y^2 = (a+r)^2 , z = 0 \} \right)$

car $F\left(\{\pi\} \times]-\pi, \pi[\right) = T_{ar} \cap \{ x < 0 , y = 0 \}$

et $F\left( ]-\pi, \pi[\times \{\pi\} \right) = T_{ar} \cap \{ x^2 + y^2 = (a+r)^2 , z = 0 \}$

6 – Comme $T_{ar} \cap \{ x < 0 \quad y = 0 \}$ et $T_{ar} \cap \{ x^2 + y^2 = (a+r)^2 \quad z = 0 \}$ sont des courbes d'aire nulle,

$$\text{Aire}\left[T_{ar} \right] = \int_{T_{ar}} 1 \, d\sigma_{T_{ar}} = \iint_{(\theta, \phi) \in]-\pi, \pi[\times]-\pi, \pi[} \sqrt{\det G^F} \, d\theta \, d\phi$$

$$G^F = \begin{pmatrix} (a + r \cos\phi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \qquad \sqrt{\det G^F} = r \left(a + r \cos\phi \right)$$

$$\text{Aire}\left[T_{ar} \right] = \int_{\theta = -\pi}^{\pi} \int_{\phi = -\pi}^{\pi} r \left(a + r \cos\phi \right) d\theta \, d\phi = 4\pi^2 r a$$