UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Examen (Décembre 2014)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. On peut admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie... Durée : 2 heures

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (Question de cours, 4 points)

1 Rappeler la définition de la dérivée covariante d'un champs de vecteurs $v(t)$ le long d'une courbe paramétrée $t \mapsto c(t)$ tracée sur une sous-surface différentiable S de $\mathbb{R}^3$.
2 Rappeler la définition des géodésiques d'une sous-surface différentiable de $\mathbb{R}^3$.
3 Rappeler une propriété importante de la vitesse des géodésiques.
4 Comment est située l'accélération d'une géodésique d'une sous-surface différentiable S de $\mathbb{R}^3$ en un point p par rapport au plan tangent à S en p ?

Exercice 2 (Calcul d'aire, 2 points)

1 Déterminer l'aire de la partie M de la sphère unité $\mathcal{S}$ d'équation

$$(x, y, z) \in M \iff \left\{ \begin{array}{c} z > 1/2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right.$$

(On pourra admettre que dans le paramétrage en coordonnées sphériques

$$\begin{array}{cccc} F :]0, 2\pi[\times]0, \pi[& \to & \mathcal{S} \\ (\theta, \varphi) & \mapsto & \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \end{array}$$

l'élément d'aire est donné par $\sin\varphi d\theta d\varphi$.)
2 Comparer le résultat avec l'aire d'un hémisphère et commenter à l'aide d'un exercice fait en TD (en moins de cinq lignes).

Exercice 3 (Minimiser, 6 points)

1 Montrer que le sous-ensemble E de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$(x, y, z) \in E \iff \begin{cases} x > 0, y > 0, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

est une sous-surface différentiable de $\mathbb{R}^3$ et déterminer en chaque point un vecteur normal.
2 Montrer que la fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 2(xy + yz + zx)$ est différentiable et déterminer son gradient en chaque point de E.
3 Montrer que sur E soit $y \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ soit $z \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.
4 Montrer que sur E, $\varphi(x, y, z) = 2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})$. En déduire que si x tend vers $+\infty$, $\varphi(x, y, z)$ aussi.
5 Déterminer les minima de la fonction φ.
6 Parmi les parallélépipèdes rectangles de volume 1, lesquels ont une mesure d'aire latérale minimale.

Exercice 4 (Hyperboloïde, 8 points)

1 Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien muni du repère canonique (O, i, j, k) on considère le paramétrage $d : t \mapsto (t, 1, t)$ de la droite D d'équation $x = z, y = 1$. Déterminer un paramétrage de la droite D_θ image de D par la rotation d'axe (Oz) et d'angle $+\theta$.
2 Montrer que la réunion des droites D_θ est l'hyperboloïde $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1 + z^2$.
3 En déduire un paramétrage de $\mathcal{H}$ de la forme

$$F : (t, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

à l'aide des paramètres t de la droite D et θ de la rotation.
4 Dessiner la trace C de $\mathcal{H}$ sur le plan $(0yz)$ d'équation $x = 0$[1].
5 Déterminer la courbure de Gauss et la courbure moyenne de $\mathcal{H}$ en tous ses points d'altitude $z = 0$, en calculant la différentielle d'un vecteur normal unitaire dans le paramétrage obtenu dans la deuxième question.
6 La droite D avec le paramétrage d est-elle une géodésique de $\mathcal{H}$? et les droites D_θ ?
7 Le cercle unité $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ est-il une géodésique de $\mathcal{H}$?
8 La courbe C paramétrée par la longueur d'arc est-elle une géodésique ? (On peut répondre sans calculs).

1. remarque : Il suffit donc de couper le plan $(0yz)$ suivant la courbe C pour permettre le passage de la droite d dans sa rotation autour le l'axe $(0z)$.