Géométrie différentielle

Feuille de TD n°7
Calculs sur les surfaces différentiables

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

1. Théorie des surfaces différentiables

Exercice 1 (Différentielle)

Soit S une surface différentiable.

1 Rappeler la définition de la différentielle d'une application f différentiable définie sur S à valeurs réelles.

2 Soit c une courbe paramétrée tracée sur S avec $c(0) = p$. Soit $X = \dot{c}(0)$. Soit f une application différentiable sur S. Montrer que $df_p(X) = d(f \circ c)_0(\frac{\partial}{\partial t})$.

3 Déterminer la différentielle de l'application $p(x, y, z) \mapsto xyz$ définie sur l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$, au point $A = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{15})$ dans la direction $V = (1, -1, 0)$.

Exercice 2 (Changement de paramétrage)

Soit S une surface différentiable munie d'un atlas $\mathcal{F}$ et d'une métrique riemannienne g. Soit $F : U \to V$ et $F' : U' \to V$ deux paramétrages de S dans $\mathcal{F}$. (Pour simplifier les notations, on suppose que F et F' paramètrent le même ouvert V de S.) Soit p un point de V. Soit $u_0 = F^{-1}(p)$ et $u'_0 = F'^{-1}(p)$

1 Rappeler la définition de l'application Δ_F.

2 On note G la matrice de la métrique riemannienne g dans la base $X_i := \Delta_F \frac{\partial}{\partial u^i}$ de T_pS et G' la matrice analogue construite à partir du paramétrage F'. Relier G et G'.

3 Relier les symboles de Christoffel dans le paramétrage F et dans le paramétrage F'.

4 Rappeler la définition de la dérivée covariante sur S.

5 Montrer que cette définition ne dépend pas du paramétrage choisi.

6 Rappeler la définition de la dérivée covariante seconde sur S. Montrer que cette définition ne dépend pas du paramétrage choisi.

7 Rappeler la définition de la courbure de Gauss S. Montrer que cette définition ne dépend pas du paramétrage choisi.

Exercice 3 (Crochet de Lie)

1 Soit S une surface différentiable et X, Y deux champs de vecteurs différentiables sur S. Si f est une fonction différentiable sur S à valeurs réelles, on notera $X \cdot f := df(X)$ la différentielle de f appliquée au vecteur X. Montrer qu'il existe un unique champs de vecteurs noté $[X, Y]$ sur S tel que pour toute fonction différentiable f sur S,

$$X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f) = [X, Y] \cdot f.$$

2 Montrer que pour toute métrique riemannienne g sur S, la dérivée covariante ∇ vérifie

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Exercice 4 (Métrique riemannienne)

On fixe un réel strictement positif r. On considère l'application

$$\begin{array}{rcc} F : \mathbb{R}\times^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} (1+r\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ (1+r\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}. \end{array}$$

1 Montrer qu'on définit une métrique riemmannienne sur $Im(F) = T$ en posant $g(\frac{\partial F}{\partial \varphi}) = g(\frac{\partial F}{\partial \theta}) = 1$ et $g(\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \theta}) = 0$.
2 Déterminer la courbure de Gauss de T avec la métrique g.
3 Déterminer les géodésiques de (T, g).

Exercice 5 (Métrique riemannienne)

Soit $\kappa \in \mathbb{R}^+$. On considère sur le plan affine $\mathbb{R}^2$, la métrique riemannienne donnée par

$$g_{ij}(x_1, x_2) = \frac{1}{(1+\kappa(x^2+y^2))^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la paramétrisation Id de $\mathbb{R}^2$.
1 Calculer les symboles de Christoffel, par la formule

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right) g^{mk}.$$

2 On rappelle la formule des coefficients du tenseur de courbure

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^l}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial u^j} + \sum_m \left(\Gamma_{mi}^l \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{mj}^l \Gamma_{ki}^m\right)\right) X_l$$

Calculer la courbure de Gauss de $(\mathbb{R}^2, g)$.

Exercice 6 (Modèle du plan hyperbolique)

On considère

$$\mathbb{H} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$$

avec pour métrique riemannienne la restriction g sur les espaces tangents de la forme bilinéaire symétrique

$$< \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} >= XX' + YY' - ZZ'.$$

1 Montrer que g est définie positive. On admettra qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2 On considère le paramétrage

$$\begin{array}{rcc} F : \mathbb{R}\times]-\pi, \pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \cosh(\varphi)\cos(\theta) \\ \cosh(\varphi)\sin(\theta) \\ \sinh(\varphi) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Calculer la matrice G de g dans ce paramétrage, les symboles de Christoffel, le tenseur de courbure et la courbure de Gauss de $\mathbb{H}$.
3 Déterminer des géodésiques.

Exercice 7 (Par paramétrages)

1 Tracer la courbe paramétrée plane $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^3 - t, t^2)$.
2 L'image de l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ $(x, y) \mapsto (x^3 - x, x^2, y, y, y)$ est-elle une surface différentiable ? Si oui, déterminer ses plans tangents.
3 L'image de l'application $F :]-\infty, 0[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5$ $(x, y) \mapsto (x^3 - x, x^2, y, y, y)$ est-elle une surface différentiable ? Si oui, déterminer ses plans tangents.
4 L'image de l'application $F :]-\infty, 1[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5$ $(x, y) \mapsto (x^3 - x, x^2, y, y, y)$ est-elle une surface différentiable ? Si oui, déterminer ses plans tangents.

Exercice 8 (Par équations)

1 Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^5$ d'équation

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = u^2 \\ x + y + z + t = u \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

est-il une surface différentiable ? Si oui, déterminer ses plans tangents.
2 Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^5$ d'équation

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = u^3 \\ x + y + z + t = u + 1 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

est-il une surface différentiable ? Si oui, déterminer ses plans tangents.

Exercice 9 (Variété grassmannienne)

On considère $G(2, 4)$ l'ensemble des plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$. À chaque matrice 4×2 de rang 2,

$$X = (\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}$$

on associe le plan $\Phi(X)$ engendré par les deux vecteurs colonnes $\vec{x}$ et $\vec{y}$. On considère pour chaque couple (i, j) d'indice avec $i < j$ l'ouvert

$$\Omega_{ij} := \{X \in M_{4,2}(\mathbb{R}) / \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} \neq 0.\}$$

$U_{ij} = \{X \in \Omega_{ij} / \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ et $V_{ij} := \Phi(U_{ij}) = \{\Phi(X) \in G(2, 4), X \in U_{ij}\}$.

1 Montrer que $\Phi(X) = \Phi(X')$ si et seulement si, il existe une matrice $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ telle que $\vec{x'} = \alpha\vec{x} + \gamma\vec{y}$ et $\vec{y'} = \beta\vec{x} + \delta\vec{y}$.
2 Montrer que chaque plan P de V_{ij} s'écrit de façon unique $P = \Phi(X)$ avec $X \in U_{ij}$.
3 Montrer que U_{ij} est un espace affine, que $\Phi_{ij} = \Phi_{|U_{ij}} : U_{ij} \to V_{ij}$ est une bijection et que les V_{ij} recouvrent $G(2, 4)$.
4 Montrer que

$$\Phi_{ij}^{-1} \circ \Phi_{kl} : U_{kl} \cap \Phi_{kl}^{-1}(V_{ij}) \to U_{ij} \cap \Phi_{ij}^{-1}(V_{kl})$$

est un difféomorphisme.
5 En déduire une structure de variété différentiable sur $G(2, 4)$.