UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Feuille de TD n°5, Calculs sur les surfaces différentiables

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

1. Dérivées covariantes

Exercice 1 (Dérivées covariantes)

1 Montrer que l'application

$$f : \mathcal{P} = (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \{0\} \to \mathcal{C} = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 / Z > 0, X^2 + Y^2 = 1/3Z^2\}$$
$$(x, y, 0) \mapsto \frac{1}{2\sqrt{X^2 + Y^2}}(X^2 - Y^2, 2XY, \sqrt{3}(X^2 + Y^2))$$

est une isométrie locale.

2 On considère dans le plan $\mathcal{P}$ la courbe paramétrée par $c : t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$. Déterminer son image d dans le cône épointé $\mathcal{C}$. Déterminer l'image $v(t)$ du champs de vecteurs constant $(1, 0, 0)$ par la différentielle de f au point $c(t)$. Calculer $c(2\pi) - c(0)$. Calculer la dérivée covariante $\frac{\nabla}{dt}v(t)$ du champs de vecteur $v(t)$ sur le cône $\mathcal{C}$ le long de la courbe d.

Exercice 2 (Isométries locales)

1 Montrer que l'application

$$f : P = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \to C = S^1 \times \mathbb{R}$$
$$(t, y, 0) \mapsto (\cos t, \sin t, y)$$

est une isométrie locale.

2 Les courbures principales des surfaces régulières sont-elles des quantités intrinsèques ? La courbure moyenne des surfaces régulières est elle une quantité intrinsèque ?

3 Déterminer un champs de vecteurs non nul à dérivée covariante nulle le long de la courbe du cylindre C d'équation $Z = 0$.

Exercice 3 (Dérivées covariantes)

1 Soit $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. On considère sur la sphère unité la courbe paramétrée par $c : t \mapsto (\cos\theta\cos t, \cos\theta\sin t, \sin\theta)$. Calculer la dérivée covariante du champs de vecteurs $\dot{c}(t)$ sur S le long de c.

2. Symboles de Christoffel

Exercice 4 (Symboles de Christoffel)

Déterminer les symboles de Christoffel de la sphère unité au point $(1, 0, 0)$.

Exercice 5 (Symboles de Christoffel et première forme fondamentale)

On considère une surface régulière S de $\mathbb{R}^3$ et un paramétrage local F. On note $X_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}$

1 Rappeler la formule de calcul de $\frac{\partial}{\partial u_k} I(X_i, X_j)$.

2 Montrer que $\frac{\partial}{\partial u_k} g_{ij} = \sum_m (\Gamma^m_{ki} g_{mj} + \Gamma^m_{kj} g_{mi})$.

3 Calculer de même $\frac{\partial}{\partial u_i} g_{kj}$ et $\frac{\partial}{\partial u_j} g_{ik}$.

4 Déterminer les symboles de Christoffel en fonction des coefficients de la première forme fondamentale.

Exercice 6 (Calculs sur un ellipsoïde)

Dans tout cet exercice, on considère un ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$ dans $\mathbb{R}^3$.

1 Paramétrer $\mathcal{E}$ en coordonnées sphériques au voisinage du point $p(1, 0, 0)$. On notera F ce paramétrage.

2 Déterminer un champs de vecteurs normaux unitaires $N(u)$ au point $F(u)$.

3 Calculer la matrice $G(u)$ de la première forme fondamentale I dans la base $X_i(u) := \frac{\partial F}{\partial u_i}$ de $T_{F(u)}\mathcal{E}$ correspondant à ce paramétrage F. Calculer $G^{-1}(u)$.
4 Calculer l'endomorphisme de Weingarten à l'aide de la définition et du champs de vecteurs normaux N.
5 Calculer l'endomorphisme de Weingarten à l'aide des dérivées secondes du paramétrage F et du champs de vecteurs normaux N.
6 Calculer la courbure de Gauss.
7 Calculer la matrice $H(u)$ de la seconde forme fondamentale II dans la base $X_i(u)$.
8 Calculer les symboles de Christoffel de la base $X_i(u)$ à l'aide des dérivées secondes du paramétrage F.
9 Calculer les symboles de Christoffel de la base $X_i(u)$ à l'aide de la matrice $G(u)$ par la formule

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m}\right) g^{mk}.$$

10 Calculer $\nabla^2_{X_i X_j} X_k$ en p à l'aide de la définition des dérivées secondes covariantes.
11 Calculer les valeurs $R(X_i, X_j)X_k$ de l'endomorphisme de courbure en p à l'aide de la définition.
12 Déterminer les valeurs $R(X_i, X_j)X_k$ de l'endomorphisme de courbure en p à l'aide de l'équation de Gauss

$$R(X_i, X_j)X_k = II(X_j, X_k)W(X_i) - II(X_i, X_k)X_j.$$

13 Retrouver la courbure de Gauss en p à l'aide de la formule $K(p) = I(R_p(V, W)W, V)$ du théorème Egreguim où (V, W) est une base orthonormée de $T_p\mathcal{E}$.
14 Calculer les valeurs $R(X_i, X_j)X_k$ de l'endomorphisme de courbure en p à l'aide de la formule

$$R(X_i, X_j)X_k = K(p)[I(X_j, X_k)X_i - I(X_i, X_k)X_j].$$

3. Surfaces différentiables

Exercice 7 (Différentielle)

Soit S une surface différentiable.
1 Rappeler la définition de la différentielle d'une application f différentiable définie sur S à valeurs réelles.
2 Déterminer la différentielle de l'application $p(x, y, z) \mapsto z$ définie sur l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$.
3 Soit c une courbe paramétrée tracée sur S avec $c(0) = p$. Soit $X = \dot{c}(0)$. Soit f une application différentiable sur S. Montrer que $df_p(X) = d(f \circ c)_0(\frac{\partial}{\partial t})$.
4 Déterminer la différentielle de l'application $p(x, y, z) \mapsto xyz$ définie sur l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$, au point $A = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{15})$ dans la direction $V = (1, -1, 0)$.

Exercice 8 (Changement de paramétrage)

Soit S une surface différentiable munie d'un atlas $\mathcal{F}$ et d'une métrique riemannienne g. Soit $F : U \to V$ et $F' : U' \to V$ deux paramétrages de S dans $\mathcal{F}$. (Pour simplifier les notations, on suppose que F et F' paramètrent le même ouvert V de S.) Soit p un point de V. Soit $u_0 = F^{-1}(p)$ et $u'_0 = F'^{-1}(p)$
1 Rappeler la définition de l'application Δ_F.
2 On note G la matrice de la métrique riemannienne g dans la base $X_i := \Delta_F \frac{\partial}{\partial u^i}$ de T_pS et G' la matrice analogue construite à partir du paramétrage F'. Relier G et G'.
3 Relier les symboles de Christoffel dans le paramétrage F et dans le paramétrage F'.
4 Rappeler la définition de la dérivée covariante sur S.
5 Montrer que cette définition ne dépend pas du paramétrage choisi.
6 Rappeler la définition de la dérivée covariante seconde sur S. Montrer que cette définition ne dépend pas du paramétrage choisi.
7 Rappeler la définition de la courbure de Gauss S. Montrer que cette définition ne dépend pas du paramétrage choisi.

Exercice 9 (Crochet de Lie)

1 Soit S une surface différentiable et X, Y deux champs de vecteurs différentiables sur S. Si f est une fonction différentiable sur S à valeurs réelles, on notera $X \cdot f := df(X)$ la différentielle de f appliquée au vecteur X. Montrer qu'il existe un unique champs de vecteurs noté $[X, Y]$ sur S tel que pour toute fonction différentiable f sur S,

$$X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f) = [X, Y] \cdot f.$$

2 Montrer que pour toute métrique riemannienne g sur S, la dérivée covariante ∇ vérifie

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

4. Constructions de surfaces et variétés différentiables

Exercice 10 (Par paramétrages)

1 Tracer la courbe paramétrée plane $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^3 - t, t^2)$.
2 L'image de l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ $(x, y) \mapsto (x^3 - x, x^2, y, y, y)$ est-elle une surface différentiable ? Si oui, déterminer ses plans tangents.
3 L'image de l'application $F :]-\infty, 0[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^5$ $(x, y) \mapsto (x^3 - x, x^2, y, y, y)$ est-elle une surface différentiable ? Si oui, déterminer ses plans tangents.
4 L'image de l'application $F :]-\infty, 1[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^5$ $(x, y) \mapsto (x^3 - x, x^2, y, y, y)$ est-elle une surface différentiable ? Si oui, déterminer ses plans tangents.

Exercice 11 (Par équations)

1 Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^5$ d'équation

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = u^2 \\ x + y + z + t = u \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

est-il une surface différentiable ? Si oui, déterminer ses plans tangents.
2 Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^5$ d'équation

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = u^3 \\ x + y + z + t = u + 1 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

est-il une surface différentiable ? Si oui, déterminer ses plans tangents.

Exercice 12 (Variété grassmannienne)

On considère $G(2, 4)$ l'ensemble des plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$. À chaque matrice 4×2 de rang 2,

$$X = (\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}$$

on associe le plan $\Phi(X)$ engendré par les deux vecteurs colonnes $\vec{x}$ et $\vec{y}$. On considère pour chaque couple (i, j) d'indice avec $i < j$ l'ouvert

$$\Omega_{ij} := \{X \in M_{4,2}(\mathbb{R}) / \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} \neq 0.\}$$

$U_{ij} = \{X \in \Omega_{ij} / \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ et $V_{ij} := \Phi(U_{ij}) = \{\Phi(X) \in G(2, 4), X \in U_{ij}\}$.
1 Montrer que $\Phi(X) = \Phi(X')$ si et seulement si, il existe une matrice $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ telle que $\vec{x'} = \alpha\vec{x} + \gamma\vec{y}$ et $\vec{y'} = \beta\vec{x} + \delta\vec{y}$.
2 Montrer que chaque plan P de V_{ij} s'écrit de façon unique $P = \Phi(X)$ avec $X \in U_{ij}$.
3 Montrer que U_{ij} est un espace affine, que $\Phi_{ij} = \Phi_{|U_{ij}} : U_{ij} \to V_{ij}$ est une bijection et que les V_{ij} recouvrent $G(2, 4)$.
4 Montrer que

$$\Phi_{ij}^{-1} \circ \Phi_{kl} : U_{kl} \cap \Phi_{kl}^{-1}(V_{ij}) \to U_{ij} \cap \Phi_{ij}^{-1}(V_{kl})$$

est un difféomorphisme.
5 En déduire une structure de variété différentiable sur $G(2, 4)$.

Exercice 13 (Le groupe de Lie $GL_n(\mathbb{R})$)

Montrer que l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ inversibles forme une variété différentiable de dimension à déterminer.

Exercice 14 (Métrique riemannienne)

On fixe un réel strictement positif r. On considère l'application

$$\begin{array}{rcc} F : \mathbb{R}\times^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} (1+r\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ (1+r\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}. \end{array}$$

1 Montrer qu'on définit une métrique riemmannienne sur $Im(F) = T$ en posant $g(\frac{\partial F}{\partial \varphi}) = g(\frac{\partial F}{\partial \theta}) = 1$ et $g(\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \theta}) = 0$.
2 Déterminer la courbure de Gauss de T avec la métrique g.
3 Déterminer les géodésiques de (T, g).

Exercice 15 (Métrique riemannienne)

Soit $\kappa \in \mathbb{R}^+$. On considère sur le plan affine $\mathbb{R}^2$, la métrique riemannienne donnée par

$$g_{ij}(x_1, x_2) = \frac{1}{(1+\kappa(x^2+y^2))^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la paramétrisation Id de $\mathbb{R}^2$.
1 Calculer les symboles de Christoffel, par la formule

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_m \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right) g^{mk}.$$

2 On rappelle la formule des coefficients du tenseur de courbure

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial u^j} + \sum_m \left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kj} - \Gamma^l_{mj}\Gamma^m_{ki}\right)\right) X_l$$

Calculer la courbure de Gauss de $(\mathbb{R}^2, g)$.

Exercice 16 (Modèle du plan hyperbolique)

On considère

$$\mathbb{H} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2-z^2 = -1, z > 0\}$$

avec pour métrique riemannienne la restriction g sur les espaces tangents de la forme bilinéaire symétrique

$$< \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} >= XX' + YY' - ZZ'.$$

1 Montrer que g est définie positive. On admettra qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2 On considère le paramétrage

$$\begin{array}{rcc} F : \mathbb{R}\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \cosh(\varphi)\cos(\theta) \\ \cosh(\varphi)\sin(\theta) \\ \sinh(\varphi) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Calculer la matrice G de g dans ce paramétrage, les symboles de Christoffel, le tenseur de courbure et la courbure de Gauss de $\mathbb{H}$.
3 Déterminer des géodésiques.