Géométrie différentielle

FEUILLE DE TD N°3, SURFACES

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

1. Exercices sur le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites

Exercice 1 (difféomorphisme local, global)

1 Soit U le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : U &\to U \\ (x,y) &\mapsto (x^2-y^2, 2xy) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme au voisinage de chacun des points de U.

2 Est-ce un difféomorphisme de U ?

Exercice 2 (Sous-variété de $\mathbb{R}^2$)

Soit

$$\mathcal{C} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^3+y^3-3xy=0\}.$$

1 Au voisinage de quels points de $\mathcal{C}$, cette équation définit-elle y comme fonction de x ? Quelle est alors la dérivée de cette fonction ?

2 Paramétrer $\mathcal{C}$ à l'aide de t tel que $y = tx$.

3 Représenter $\mathcal{C}$ avec ses asymptotes.

4 Le sous-ensemble $\mathcal{C}$ est-il une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^2$?

2. Exemples de surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 3 (Surfaces paramétrées)

La surface paramétrée par $(u,v) \mapsto (u+v^2, u^2-v^2, v)$ est-elle régulière au voisinage de $A(1,-1,-1)$?

Exercice 4 (Surfaces implicites)

1 L'ensemble d'équation $x^2+y^2+z^2=4$ est-il une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Le décrire.

2 L'ensemble d'équation $(x^2+y^2+z^2-4)^2=0$ est-il une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Le décrire.

3 L'ensemble d'équation $x^2+y^2-z^2=0$ est-il une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Le décrire. Montrer que tous les chemins du point $A(1,0,1)$ au point $B(1,0,-1)$ passent par un même point à déterminer.

4 Les ensembles d'équation respective

$$a) x^2+3y^2+z^2+4xy+2z=5 \qquad b) 2x^2+3y^2=1$$
$$c) \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1 \qquad d) \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{4}=-1$$

sont-ils des surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$? Les décrire.

Exercice 5 (paramétrages de la sphère)

On considère la sphère S unité dans $\mathbb{R}^3$.

1 Déterminer par une expression en coordonnées de la projection stéréographique d'un ouvert U de S (à déterminer) depuis le pôle nord sur le plan d'équation $z=0$. Vérifier qu'il s'agit bien de paramétrage de U.

2 Faîtes de même depuis le pôle sud.

3 Montrer que le changement de paramétrage est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

4 Interprétér les coordonnées sphèriques comme un paramétrage de la sphère S.

3. Applications régulières

Exercice 6 (Applications régulières ?)

1 La restriction à la surface d'équation $x^2+y^2+z^2-6x=-5$ de la fonction $(x,y,z)\mapsto 5x^6+7xy^4-2$ est-elle différentiable ?
2 La restriction à la surface d'équation $x^2+y^2+z^2-6x=-5$ de la fonction $(x,y,z)\mapsto \sqrt{|x|}$ est-elle différentiable ?

Exercice 7 (Difféomorphismes)

1 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\ :U\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que le graphe de f est difféomorphe à U.
2 Les surfaces $\mathcal{E}$ d'équation $2x^2+3y^2+4z^2=1$ et $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=4$ sont-elles difféomorphes ?
3 Les surfaces $\mathcal{C}$ d'équation $2x^2+3y^2=1$ et $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=4$ sont-elles difféomorphes ?

4. Plans tangents

Exercice 8 (Détermination de plan tangent)

1 Déterminer le plan tangent en $A(1,-1,-1)$ à la surface paramétrée par $(u,v)\mapsto(u+v^2,u^2-v^2,v)$.
2 Déterminer le plan tangent en $A(1,1,-1)$ à la surface d'équation $x^5+y^5+z^5=1$.
3 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\ :U\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Déterminer le plan tangent au graphe de f en chacun de ses points.

Exercice 9 (Plan tangent)

Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2(2z^2+y^2)+x=0$.
1 La surface S est-elle régulière ?
2 Paramétrer la surface S (de manière polynomiale) en prenant les paramètres u et v parmi les variables x, y et z.
3 Déterminer une base de l'espace tangent à la surface S en $A(-6,1,-1)$.
4 Calculer un vecteur normal à la surface S en $A(-6,1,-1)$.
5 Le vecteur $V=(27,-29,-1)$ appartient-il au plan tangent à S en $A(-6,1,-1)$?

Exercice 10 (Plan tangent)

1 Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par F : $(u,v)\mapsto(u+v^2,u^2-v^2,v)$ au point $M(u_0,v_0)$ de paramètres (u_0,v_0).
2 Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^5+y^5+z^5=1$ au point $M(x_0,y_0,z_0)$ de coordonnées (x_0,y_0,z_0).
3 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\ :U\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent au graphe de f en chacun de ses points.

Exercice 11 (Détermination de minima)

Dans tout l'exercice, r et h parcourt $]0,+\infty[$
1 Déterminer le volume $V(r,h)$ d'un cylindre plein de hauteur h et de rayon r.
2 Déterminer l'aire $A(r,h)$ d'une casserole de hauteur h et de rayon r.
3 Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ avec coordonnées (r,h,v) d'équation $1=V(r,h)$ est une surface régulière.
4 Déterminer le gradient de la fonction $\alpha:(r,h,v)\mapsto A(r,h)$ et celui de la fonction $\nu:(r,h,v)\mapsto V(r,h)-1$
5 Soit (r_0,h_0,v_0) un minimum de la fonction α sur la surface d'équation $1=V(r,h)$. Comparer $grad_{(r_0,h_0,v_0)}\alpha$ et $grad_{(r_0,h_0,v_0)}\nu$.
6 Déterminer le minimum de $A(r,h)$ sur la surface d'équation $V(r,h)=1$. Interpréter ce résultat.