**Géométrie différentielle**

FEUILLE DE TD N°2, COURBES

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension $n$.

## 1. Courbes planes

### Exercice 1 (Calculs de courbure)

On considère l'espace affine euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1** Calculer la fonction courbure d'un cercle de rayon $r > 0$.

**2** Soit $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc. Soit $R$ la rotation de centre 0 et d'angle $\alpha$, et $S$ la symétrie d'axe $x = y$. Déterminer la fonction courbure de $R \circ c$ et celle de $S \circ c$.

**3** Calculer la fonction courbure de la courbe de Lissajou $\left\{ \begin{array}{cccc} c : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \end{array} \right.$

**4** Déterminer une courbe fermée à courbure partout strictement négative.

**5** Montrer qu'une courbe plane régulière de courbure nulle est un segment de droite.

### Exercice 2 (Courbure en un point extremal)

Soit $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc. On suppose que $c$ reste dans le disque de rayon $r$ et qu'au point de paramètre $\tau$, $\| c(\tau) \| = r$.

**1** Montrer en dérivant une fois la fonction $t \mapsto \| c(t) \|^2$ que $\ddot{c}(\tau)$ est colinéaire à $c(\tau)$ ?

**2** Montrer en dérivant à nouveau la fonction $t \mapsto \| c(t) \|^2$ que la courbure en $\tau$ vérifie $|\kappa(\tau)| \geq 1/r$.

### Exercice 3 (Construction d'une courbe plane à courbure prescrite)

Le but de l'exercice est de montrer le théorème suivant.

**Theorem 1.** *Soit $I$ un intervalle et $\kappa : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors, il existe une courbe plane $c : I \to \mathbb{R}^2$ paramétrée par la longueur d'arc et de fonction courbure $\kappa$. Cette courbe est unique à composition au but par un déplacement près.*

**1** On considère le système d'équations différentielles linéaire du premier ordre

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c \\ v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ v \\ n \end{pmatrix}.$$

où les fonctions $c, v, n : I \to \mathbb{R}^2$ sont les inconnues. Montrer que ce système admet une unique solution $(c(t), v(t), n(t))$ avec pour valeur initiale un vecteur fixé $(c_0, v_0, n_0)$ avec $(v_0, n_0)$ base orthonormée directe.

**2** Écrire un système d'équations différentielles linéaire du premier ordre satisfait par le vecteur $(< v, v >, < n, n >, < v, n >)$.

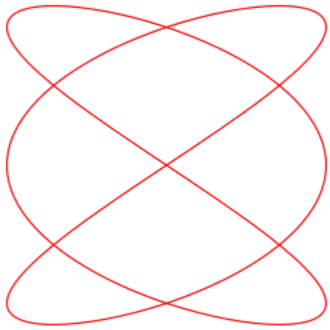
**3** Montrer que pour les solutions obtenues précédemment, $(v(t), n(t))$ reste un repère orthonormé direct.

**4** En déduire que la courbe $c$ obtenue est paramétrée par la longueur d'arc et que sa fonction courbure est $\kappa$.

**5** Conclure.

**Exercice 4** (Nombre de rotation)

Calculer le nombre de rotation de la courbe régulière fermée suivante



**Exercice 5** (Courbure totale)

**1** Calculer la somme des mesures des angles extérieurs d'un triangle et d'un carré.
**2** Déterminer la fonction courbure et la courbure totale de l'ovale paramétré par $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t))$.

## 2. Courbes de $\mathbb{R}^3$

**Exercice 6** (Formules de Frenet)

Démontrer les formules de Frenet pour les courbes paramétrées par la longueur d'arc dans $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 7** (Torsion)

**1** Calculer la torsion de l'hélice $\left\{\begin{array}{cccc} c : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \end{array}\right.$.
**2** Calculer la torsion de la courbe de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $t \mapsto (4\cos t, 5 - 5\sin t, -3\cos t)$.
**3** La courbe précédente est-elle plane ?

**Exercice 8** (Courbes sur une surface)

Soit $C$ la courbe tracée sur la surface d'équation $3z = xy + x^3$ et dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ est la courbe paramétrée $C'$ définie par $x = t$, $y = t^2$ pour $t$ parcourant $[0, 1]$.
**1** Donner une expression intégrale pour la longueur de $C'$ puis celle de $C$, puis les comparer.
**2** Calculer la longueur de $C'$ puis celle de $C$.

**Exercice 9** (Construction des courbes de $\mathbb{R}^3$)

Énoncer pour les courbes de l'espace $\mathbb{R}^3$, le théorème analogue à la caractérisation des courbes planes à déplacements près par leur courbure.