UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Feuille de TD n°1, Courbes dans $\mathbb{R}^n$

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n.

Exercice 1 (Hélice)

1 Soient r et h deux nombres réels strictement positifs. La courbe paramétrée suivante, appelée hélice, est-elle régulière ?

$$c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \end{array}$$

2 Les courbes paramétrées suivantes sont-elle régulières ?

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad e : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 2 (Reparamétrage d'une courbe régulière)

1 Montrer que le reparamétrage d'une courbe régulière est encore régulier.

2 Peut-on reparamétrer toute courbe paramétrée par sa longueur d'arc ?

3 Déterminer un reparamétrage de la courbe $\left\{ c : \begin{array}{ccc} [0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array} \right.$ qui en change l'orientation.

Exercice 3 (Equivalence)

1 Les courbes paramétrées suivantes sont-elles équivalentes ?

$$c : \begin{array}{ccc} [0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad d : \begin{array}{ccc} [0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \end{array}$$

2 Les courbes paramétrées suivantes sont-elles équivalentes ?

$$c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad d : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \end{array}$$

3 Deux courbes paramétrées équivalentes ont-elles même image ? La réciproque est-elle vraie ?

4 Peut-on retrouver une courbe à partir de son image ?

Exercice 4 (Calcul de longueur)

1 Calculer la longueur de la portion d'hélice

$$c : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \end{array}$$

2 Déterminer un paramétrage de cette portion d'hélice par sa longueur d'arc.

Exercice 5 (Différents paramétrages par longueur d'arc)

Montrer que deux paramétrages par longueur d'arc d'une même courbe régulière orientée diffèrent au plus par un changement de paramétrage de la forme $t \mapsto t_0 + t$.

Exercice 6 (Approximation par lignes polygonales)

Vérifier l'approximation polygonale pour un cercle de rayon r approché par des polygones réguliers à n côtés.

Exercice 7 (Les cycloïdes)

On considère un cercle $\mathcal{C}_1$ de rayon 1 qui glisse sur l'axe des x du plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$, et pour tout nombre réel r strictement positif le cercle $\mathcal{C}_r$ de rayon r, concentrique avec $\mathcal{C}_1$ et solidement attaché à $\mathcal{C}_1$.

1 Déterminer par un paramétrage, la trajectoire T_r, appelée "cycloïde" du point M de coordonnées $(0, 1-r)$ de $\mathcal{C}_r$ lorsque $\mathcal{C}_1$ glisse sur l'axe des x.

2 Faire une ébauche de T_r suivant la position de r par rapport à 1.

3 T_r est-elle une courbe régulière ?

4 Calculer la longueur de T_1 quand $\mathcal{C}_1$ fait un tour.

Exercice 8 (Approximation par lignes polygonales)

1 On rappelle qu'une ligne polygonale P de $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'un uplet $P = (a_0, a_1, \cdots, a_k)$ de points de $\mathbb{R}^n$. On supposera aussi que deux points consécutifs sont distincts. Rappeler la formule pour la longueur d'une ligne polygonale P.

2 On cherche à montrer le théorème suivant.

Théorème. *Soit $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta >$ tel que pour toute partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ de $[a, b]$ de pas inférieur à δ,*

$$L[P] \leq L[c] \leq L[P] + \epsilon$$

où $P = (c(t_0), c(t_1), \cdots, c(t_m))$ est la ligne polygonale simplement inscrite dans la courbe c associée à la partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ de $[a, b]$.

(1) Écrire en termes de quantificateurs, en partant d'un $\epsilon_1 > 0$, le théorème des sommes de Riemann pour la fonction $[a, b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \| \dot{c}(t) \|$.

(2) Écrire en termes de quantificateurs en partant d'un $\epsilon_2 > 0$ la propriété de continuité uniforme des fonctions composantes $[a, b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dot{c}_j(t)$.

(3) Soit une partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ de $[a, b]$. Écrire en termes de quantificateurs le théorème des accroissements finis pour la fonction $[t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto c_j(t)$.

3 Majorer la quantité $|\| c(t_{i+1}) - c(t_i) \| - \| \dot{c}(t_{i+1}) \| (t_{i+1} - t_i)|$ par $\sqrt{n}\epsilon_2(t_{i+1} - t_i)$.

4 Majorer la quantité $|L[c] - L[P]|$ par $\epsilon_1 + \sqrt{n}\epsilon_2(b - a)$.

5 Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta >$ tel que pour toute partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ de $[a, b]$ de pas inférieur à δ,

$$L[P] - \epsilon \leq L[c] \leq L[P] + \epsilon.$$

6 Conclure à l'aide de l'inégalité triangulaire sur les polygones.