

**Algèbre et Arithmétique 1**

*Feuille n°4 :
division euclidienne, pgcd, ppcm*

Exercices à savoir faire**Division euclidienne****Exercice 1**

Effectuer, sans utiliser la calculatrice, les divisions euclidiennes suivantes :

- 1 100 001 divisé par 101,
- 2 656 565 divisé par 11,
- 3 100 001 et 101 sont-ils premiers entre eux ? Même question pour 656 565 et 11.

Exercice 2

Connaissant le reste de la division euclidienne d'un entier par 10, pouvez-vous en déduire celui de la division euclidienne de cet entier par 5 ? par 6 ?

Exercice 3

Sachant que $12\,079\,233 = 75\,968 \times 159 + 321$, déterminer le reste de la division euclidienne de 12 079 233 par 75 968, puis par 159.

Exercice 4

On range 461 pots de yaourts dans des caisses (toutes identiques), en remplissant entièrement une caisse avant de passer à la suivante. On utilise 14 caisses ; combien chaque caisse contient-elle de pots ? (d'après D. Perrin ; plusieurs solutions sont possibles.)

Exercice 5

Soit n un entier. Calculer le reste de la division euclidienne de n^2 par 4, suivant que cet entier est pair ou impair. Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 8123$?

pgcd, entiers premiers entre eux**Exercice 6**

- 1 En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le pgcd de 231 868 et 8 190. En déduire leur ppcm.
- 2 Même question avec les nombres 23 145 et 117.
- 3 Même question avec 12 345 et 678.

Exercice 7

- 1 Prouver que 23 et 35 sont premiers entre eux. En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver deux entiers relatifs u et v tels que $23u + 35v = 1$.
- 2 Même question avec 27 et 25.

Exercice 8

Soit n un entier positif, prouver que $2n + 3$ et $n^2 + 3n + 2$ sont premiers entre eux.

Exercice 9

Démontrer que, pour tout entier n , la fraction $\frac{5^{n+1} + 6^{n+1}}{5^n + 6^n}$ est irréductible.

Exercice 10

On se propose d'abord de résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $35x - 26y = 4$.

- 1 Prouver que 35 et 26 sont premiers entre eux.
- 2 En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière (x_0, y_0) , puis toutes les solutions à l'équation.

On se propose d'appliquer l'équation précédente à de la cryptographie. On assimile les lettres de l'alphabet $A, B, \dots, Z$ aux nombres $0, 1, \dots, 25$. Ensuite, à chaque entier i dans $\{0, 1, \dots, 25\}$, on associe $f(i)$ le reste de la division euclidienne de $35i$ par 26. Par exemple, à la lettre B assimilée au nombre 1 on associe $f(1) = 9$ et 9 est assimilée à la lettre J . Ainsi, la lettre B sera codée J .

- 3 Coder le mot "BRETAGNE".
- 4 En utilisant, l'équation ci-dessus, décoder le mot "EKX".

Exercice 11

Montrer que, si a est premier avec b et si a est premier avec c , alors a est premier avec bc .

Exercice 12

Calculer le pgcd de $(36, 100, 45)$ et donner un triplet de Bézout pour $(36, 100, 45)$.

Bases

Exercice 13

Écrire en base 7 les nombres suivants

- 1 $A = 7^4 + 3 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 6 \times 7 + 5$
- 2 $B = 7^5 + 3 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 8$
- 3 $C = 7^4 + 7^3 \times 7 + 3 \times 7$

Exercice 14

- 1 Écrire en base 7, puis en base 2, enfin dans la base hexadécimale le nombre mille sept-cent quatre-vingt-neuf.
- 2 Que vaut le nombre écrit $\overline{101001001}$ en base 2 ?
- 3 Que vaut le nombre écrit $\overline{BAC}$ en hexadécimal ?

Exercice 15

- 1 Écrire 1234 en base 5.
- 2 Écrire $\overline{1234}^{(5)}$ en base 10.

Exercice 16

Dans une certaine base, un entier s'écrit $\overline{1254}$ et son double $\overline{2541}$. Quel est cet entier et quelle est la base ?

Exercice 17

- 1 Calculer $\overline{4023}^{(5)} \times \overline{12}^{(5)}$.
- 2 Calculer $\overline{2345}^{(6)} \times \overline{52}^{(6)}$.

Exercices à savoir faire

Division euclidienne

Exercice 18

Connaissant la division euclidienne de deux entiers n et n' par un entier $b \geq 1$ (c'est-à-dire quotients et restes), donner un moyen simple de déterminer la division euclidienne de $n + n'$ par b .

Exercice 19

Effectuer la division euclidienne de 903 par 37.

- 1 Quel est le plus petit nombre qu'il faut ajouter à 903 pour que le quotient augmente de 1 ?
- 2 Quel est le plus petit nombre qu'il faut enlever à 903 pour que le quotient diminue de 1 ?

pgcd, entiers premiers entre eux

Exercice 20

Quel est le plus petit entier (strictement positif) qui est multiple de 1, 2, 3, ..., 10 ?

Exercice 21

Si $(a, b) = (30, 21)$, calculer $d = \text{pgcd}(a, b)$ et $\text{ppcm}(a, b)$ et déterminer un couple d'entiers (u, v) tels que $au + bv = d$.

Exercice 22

- 1 Trouver des entiers relatifs u et v tels que $29u + 24v = 1$.
- 2 Déterminer l'ensemble des couples $(u, v) \in \mathbf{N}^2$ tels que $29u + 24v = 3$.

Exercice 23

- 1 Soit m et n des entiers relatifs tels que m divise à la fois $8n + 7$ et $6n + 5$. Montrer que $m = \pm 1$.
- 2 Soit a un entier relatif. Déterminer le pgcd d des entiers $m = 14a + 3$ et $n = 21a + 4$ et trouver des entiers u et v tels que $um + vn = d$.

Exercice 24

- 1 Déterminer tous les entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 325$ et $\text{ppcm}(a, b) = 30$.
- 2 Déterminer tous les entiers a et b tels que $(\text{pgcd}(a, b))^2 = \text{ppcm}(a, b)$ et $\text{pgcd}(a, b) + \text{ppcm}(a, b) = 156$.

Exercice 25

Soient a , b et c des entiers. On suppose que a divise bc et que $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

- 1 Montrer que a divise c . (*Multiplier par c une relation de Bézout $1 = au + bv$.*)
- 2 Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls. On suppose que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(c, d) = 1$ et que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ est entier. Montrer que $b = d$.

Bases

Exercice 26

- 1 Dans quelle base b a-t-on l'égalité $\overline{32}^b \times \overline{14}^b = \overline{438}^b$?
- 2 Même question avec l'équation $\overline{165}^b \times \overline{21}^b = \overline{4125}^b$.
- 3 Écrire le nombre $\overline{1010}^5$ en base 2.

Exercice 27

- 1 Écrire 1 234 en base 5.
- 2 Écrire $\overline{1234}^{(5)}$ en base 10.
- 3 Écrire 1 234 en base mixte 5, 3, 6.

Des exercices pour aller plus loin sont disponibles sur la page internet du cours
<http://perso.univ-rennes1.fr/christophe.mourougane/enseignements/2014-15/AR1/ar1.html>

Exercices pour aller plus loin

Exercice 28

On suppose que a et b sont deux entiers premiers entre eux.

- 1 On suppose qu'il existe un entier c tel que $ab = c^2$. Prouver l'existence de e et f tels que $a = e^2$ et $b = f^2$.
- 2 On suppose cette fois-ci que $ab = c^n$. Prouver l'existence de e et f tels que $a = e^n$ et $b = f^n$.

Exercice 29

On suppose que a et b sont deux entiers premiers entre eux.

- 1 Montrer que a et $a + b$ sont premiers entre eux.
 - 2 Prouver que $2a + b$ et $5a + 2b$ sont premiers entre eux.
 - 3 Montrer que pour tout entier n , a^n et b sont premiers entre eux.
 - 4 Montrer que pour tout couple d'entiers $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, a^n et b^m sont premiers entre eux.
- Réciproquement, on suppose que, pour un couple (n, m) donné d'entiers non nuls, a^n et b^m sont premiers entre eux.
- 5 Prouver que a et b sont premiers entre eux.
 - 6 Prouver que ab et $a + b$ sont premiers entre eux.
 - 7 Prouver que $a^2 + b^2$ et ab sont premiers entre eux.
 - 8 Prouver que $\text{pgcd}(a + b, a^2 - ab + b^2) \in \{1, 3\}$.

Exercice 30

Soit N , p , a et b des entiers naturels. On doit livrer N ampoules dans des petits cartons contenant p ampoules, des cartons moyens contenant $m = ap$ ampoules et des gros cartons contenant $g = abp$ ampoules. On privilégie les gros cartons devant les moyens et les moyens devant les petits.

- 1 Montrer qu'on ne peut livrer que des nombres multiples de p ampoules.
- 2 Quelles sont les opérations qui permettent de calculer le nombre de cartons de chaque type ?
- 3 Si $m = p^2$ et $g = p^3$, quelle est l'écriture de N la mieux adaptée au calcul du nombre de cartons de chaque type ?

Exercice 31

- 1 Vérifier par un calcul que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$(2uv)^2 + (u^2 - v^2)^2 = (u^2 + v^2)^2.$$

- 2 En déduire qu'il existe une infinité de solutions entière à l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.
On se donne désormais un triplet de solutions (x, y, z) avec x pair, y impair et z impair et tel que $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$.

- 3 Prouver que x et z sont premiers entre eux et que y et z sont premiers entre eux.
- 4 Prouver que $u = \frac{z-y}{2}$ et $v = \frac{z+y}{2}$ sont des entiers premiers entre eux.
- 5 En déduire que u et v sont des carrés.
- 6 Conclure qu'il existe deux entiers U et V tels que $x = 2UV$, $y = V^2 - U^2$ et $z = U^2 + V^2$.
- 7 Décrire alors l'ensemble des solutions entières de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

Exercice 32

On souhaite résoudre l'équation $a^b = b^a$ dans l'ensemble des entiers strictement positifs.

On pose $d = \text{pgcd}(a, b)$, $a = a'd$ et $b = b'd$ et on suppose que $a < b$.

- 1 Prouver que $d^{b'-a'} a'^{b'} = b'^{a'}$.
- 2 En déduire en que $a' = 1$ et que $b' > 1$ et $d > 1$.
- 3 Montrer que si $b' \geq 3$ alors $d^{b'-1} > b'$.
- 4 Conclure.
- 5 Donner une solution analytique en étudiant la fonction $x \rightarrow \frac{\log(x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$.