UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 1

Feuille n°3 : combinatoire

1. Exercices à savoir faire

1.1. Réunion, intersection, partition.

Exercice 1

1 Au mois de janvier, Anatole a pris ses repas de midi au Restau U. Il y a mangé 17 fois de la viande et 25 fois des légumes. Montrer qu'il a mangé de la viande et des légumes au cours d'un des repas.

2 Dans une classe de 35 élèves, chaque étudiant doit apprendre au moins une des deux langues, anglais ou allemand. 25 étudient l'anglais et 20 apprennent les deux langues. Combien d'élèves étudient l'allemand ?

3 Hier soir, sur 100 français, 95 ont regardé le journal télévisé, 85 ont regardé jusqu'à 22h30 le film qui suivait et 70 se sont couchés vers 23h. Combien de français (au moins) se sont couchés vers 23h après avoir regardé le journal et le film ?

Exercice 2

1 Montrer que dans un ensemble de cardinal 10, deux sous-ensembles de cardinal 7 ont une intersection non vide.

2 Montrer que dans un ensemble de cardinal 10, trois sous-ensembles de cardinal 7 ont une intersection non vide.

3 Dessiner (si possible) deux ensembles A et B avec cinq éléments chacun et dont la réunion a neuf éléments.

4 Dessiner (si possible) trois ensembles A, B et C avec cinq éléments chacun et dont la réunion a neuf éléments et l'intersection $A \cap B \cap C$ aucun.

Exercice 3

On considère deux ensembles A et B et une application $f : A \to B$.

1 Montrer que les sous-ensembles $f^{-1}(\{b\})$ forment une partition de A quand b parcourt B.

2 Soit n un entier naturel non nul. On suppose que A est un ensemble fini et que chaque élément de B a exactement n antécédents. Montrer que B est de cardinal fini et déterminer le cardinal de A en fonction de celui de B.

3 Soit n un entier naturel non nul. On suppose que A est un ensemble fini et que chaque élément de B a exactement n antécédents sauf l'élément β qui n'a que deux antécédents. Déterminer le cardinal de A.

4 Donner l'exemple d'une application $f : A \to B$ où B est un ensemble fini sans que A le soit.

1.2. **Nombre de combinaisons, coefficients binômiaux.**

Exercice 4

1 De combien de façons distinctes peut-on diviser une classe de 8 élèves en 2 groupes de 4 élèves chacun ?
2 Un ensemble fini S a 364 sous-ensembles de 3 éléments. Quel est le nombre d'éléments de S ?

Exercice 5

1 Démontrer la relation $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ pour $n > p \geq 1$ en utilisant la formule qui calcule $\binom{n}{p}$ à l'aide de factorielles.
2 Inversement, à l'aide de cette identité, démontrer par récurrence la formule qui calcule $\binom{n}{p}$.

Exercice 6

1 Démontrer de deux façons la formule $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour $n \geq p \geq 1$.
2 Démontrer de deux façons que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Exercice 7

Écrire le triangle de Pascal jusqu'à sa dixième ligne.

Exercice 8

1 À l'aide de la formule du binôme, démontrer que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Donner une interprétation combinatoire de cette formule.
2 Calculer de même $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p}$. Donner une interprétation combinatoire de cette formule.

3 Calculer $\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}$ et $\sum_{p=2}^{n} p(p-1)\binom{n}{p}$. En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{n} p^2\binom{n}{p}$.
4 Retrouver la question précédente en dérivant (une puis deux fois) la formule du binôme pour $(1+x)^n$.

Exercice 9

1 En développant $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, montrer que $\binom{2n}{n} = \sum_{p=0}^{n} (\binom{n}{p})^2$.
2 Donner une interprétation combinatoire de la formule précédente.

1.3. **Autres dénombrements.**

Exercice 10

Pour n entier naturel, on note $p(n)$ le nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Le nombre de parties du produit cartésien $A \times B$ d'un ensemble A à 5 éléments avec un ensemble B à 4 éléments est-il le produit $p(5) \times p(6)$? (Sinon que représente le nombre $p(5) \times p(6)$?)

Exercice 11

1 Soit X et Y deux ensembles finis. Combien y a-t-il d'applications injectives de X dans Y ? (La même question avec « surjectives » est naturelle, mais plus difficile.)
2 Estimer le nombre d'applications injectives de $\{1, \ldots, 30\}$ dans $\{1, \ldots, 365\}$. Sur une classe de 30 élèves, quelle est la probabilité que deux élèves soient nés le même jour ? (*Paradoxe des anniversaires*)

2. Exercices à chercher

Exercice 12

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$.
Montrer que la propriété (dite « de bon ordre ») :

toute partie non vide de E possède un plus petit élément.

implique que l'ordre est total :

deux éléments quelconques sont comparables, ou en d'autres termes :

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x.$$

Exercice 13

Un récipient contient 1 dm^3 de riz, chaque grain faisant 1 mm^3. On dispose un grain de riz sur la première case d'un échiquier, deux sur la deuxième, quatre sur la suivante, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains. Combien de cases de l'échiquier seront remplies lorsque le pot de riz ne contiendra plus assez de grains ? Combien en reste-t-il dans le pot ?

Exercice 14

On considère n objets de différentes couleurs. Si a est un entier tel que $a \leq \sqrt{n-1}$, montrer que l'on peut trouver ou bien $a+1$ objets de la même couleur, ou bien $a+1$ objets de couleurs toutes différentes.

Exercice 15

Dans un groupe de 6 personnes, deux personnes quelconques ou bien s'aiment, ou bien se détestent. Montrer que l'on peut en trouver 3 qui sont amis, ou 3 qui sont mutuellement ennemis. (*Fixer une personne Anatole ; parmi ses 5 relations, Anatole a (au moins) 3 amis, ou 3 ennemis. Si Anatole a trois amis et que deux d'entre eux sont amis, le résultat est obtenu. Sinon...*)

3. Exercices pour aller plus loin

Exercice 16

Soit E un ensemble fini non vide. On se propose de montrer que E possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

1 On suppose dans cette question que E est de cardinal impair. Montrer que l'application $A \mapsto \mathcal{C}_E A$ est une bijection de l'ensemble des parties de E de cardinal pair sur l'ensemble des parties de E cardinal impair et conclure.

2 Dans cette question, E est un ensemble fini non vide quelconque. Soit x un élément de E. Démontrer le résultat cherché en utilisant l'application qui à une partie A de E associe $A \setminus \{x\}$ si $x \in A$ et $A \cup \{x\}$ si $x \notin A$.

3 Pour tout entier naturel n non nul, déduire de la question précédente la formule $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} = 0$ (trouvée par une autre méthode à l'exercice 1.2).

Exercice 17

Soit (x_n) une suite de réels dans $]0,1[$. On pose $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Montrer l'inégalité

$$1 - S_n \leq (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \leq \frac{1}{1+S_n}.$$

Exercice 18

Si n est un entier ≥ 1 et x un réel dans $[0,1]$, montrer l'inégalité

$$1 - nx \leq (1-x)^n \leq 1 - \frac{nx}{1+(n-1)x}.$$

Exercice 19

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

Exercice 20

1 Si x et y sont deux nombres réels positifs, montrer que $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$.
2 Montrer par récurrence sur n que si $x_1, \ldots, x_{2^n}$ sont des nombres réels positifs,

$$(x_1 \cdots x_{2^n})^{1/2^n} \leq (x_1 + \cdots + x_{2^n})/2^n.$$

3 Soit $N \geq 2$ et soit $x_1, \ldots, x_N$ des nombres réels positifs. Démontrer que

$$(x_1 \cdots x_N)^{1/N} \leq (x_1 + \cdots + x_N)/N$$

(*inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique*). Pour cela, choisir un entier n tel que $N \leq 2^n$; poser, pour $N \leq k \leq 2^n$, $x_k = (x_1 + \cdots + x_N)/N$; appliquer la question précédente.

Exercice 21

1 Peut-on paver un échiquier privé de deux cases diagonalement opposées par des dominos (chacun recouvrant exactement deux cases) ?
2 Démontrer que l'on peut paver un échiquier 8×8 par des triominos en forme de L (recouvrant trois cases) de sorte à laisser vide une case quelconque prescrite à l'avance. (Remplacer 8 par 2^n, et faire une récurrence...)
3 Quels rectangles sont pavables par des triominos en forme de L ? (La réponse générale n'est semble-t-il pas connue...)

Exercice 22

Démontrer la commutativité de la multiplication dans l'ensemble des nombres entiers naturels, à l'aide des formules de définition de cette multiplication.

Exercice 23

Soit $D_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ qui ont exactement k points fixes (*dérangements*).
1 Montrer que $D_{n,0} + \cdots + D_{n,n} = n!$.
2 Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$
3 En déduire que

$$\frac{1}{n!} D_{n,0} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$