UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 1

Feuille n^o 1 : logique, raisonnement

Exercices à savoir faire

Exercice 1

Donner les tables de vérité des fonctions propositionnelles suivantes et indiquer, le cas échéant, si ce sont des tautologies :

1 $\mathcal{P}$ ou non $\mathcal{P}$ (principe du tiers exclu) ;

2 non ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) $\Leftrightarrow$ ((non $\mathcal{P}$) et (non $\mathcal{Q}$)) ;

3 ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) $\Leftrightarrow$ (non ($\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$)) ;

4 (($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) et ($\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}$)) $\Rightarrow$ ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$) (transitivité de la relation d'implication) ;

5 (non $\mathcal{P} \Rightarrow$ non $\mathcal{Q}$) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$).

Exercice 2

1 L'affirmation « je suis arrivé à la gare avant 10h » est-elle une condition nécessaire (suffisante, nécessaire et suffisante) pour « je suis monté dans le train de 9h30 » ?

2 Donner une condition suffisante et non nécessaire pour qu'un nombre entier soit strictement plus grand que 10.

3 Donner une condition nécessaire et non suffisante pour qu'un nombre entier soit divisible par 6.

Exercice 3

Considérons l'affirmation suivante : « f croissante $\Rightarrow f(3) \geq f(2)$ ». À quelle affirmation parmi les suivantes correspond sa contraposée ?

1 « $f(3) \geq f(2) \Rightarrow f$ est croissante » ;

2 « $f(3) < f(2) \Rightarrow f$ n'est pas croissante » ;

3 « f n'est pas croissante $\Rightarrow f(3) < f(2)$ ».

Exercice 4

Traduire la formule suivante en une phrase (en français) qui ne comportera pas de symboles mathématiques.

$\forall n \in \mathbf{N}\,, \forall n' \in \mathbf{N}\,, (n \neq 0 \text{ et } n' \neq 0) \Rightarrow \exists y \in \mathbf{N}, \exists q \in \mathbf{N}, \exists q' \in \mathbf{N}\,, (y = q\,n \text{ et } y = q'\,n' \text{ et } y \neq 0).$

Exercice 5

Nier l'assertion : « tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans ».

Exercice 6

On considère les formules suivantes :

$$\exists n \in \mathbf{N}\ \forall p \in \mathbf{N} \quad p \leq n\,;$$

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \exists p \in \mathbf{N} \quad p \leq n\,;$$

$$\exists x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R} \quad x + y > 0\,;$$

$$\forall x \in \mathbf{R}\ \exists y \in \mathbf{R} \quad x + y > 0\,;$$

$$\exists x \in \mathbf{R}\ \exists y \in \mathbf{R} \quad x + y > 0\,;$$

$$\forall x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R} \quad x + y > 0\,;$$

$$\exists x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R} \quad y^2 > x.$$

1 Écrire la négation de chacune de ces formules.
2 Pour chacune de ces formules, indiquer (en le justifiant) si l'assertion considérée est vraie ou fausse.

Exercice 7

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On considère les énoncés suivants :

1. Pour tout réel x, $f(x)$ est supérieur à 1.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe un réel positif x tel que $f(x)$ est positif.
5. L'application f est paire.
6. Il existe un réel x tel que pour tout réel y strictement supérieur à x, $f(x)$ est strictement supérieur à $f(y)$.

1 Traduire ces énoncés en formules mathématiques qui utilisent des quantificateurs.
2 Pour chacune des formules obtenues, écrire sa négation.
3 Pour chacun de ces énoncés, donner au moins deux exemples d'applications f qui le vérifient, et au moins deux exemples d'applications f qui ne le vérifient pas.

Exercice 8

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Traduire en langage courant les assertions suivantes. Pour chacune d'elles, trouver, si l'on peut, une fonction qui satisfait cette propriété, ainsi qu'une fonction qui ne la satisfait pas.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(x) < f(y)$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists T \in \mathbf{R}^*, f(x) = f(x+T)$.
3. $\exists T \in \mathbf{R}^*, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = f(x+T)$.
4. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, y = f(x)$.

Exercice 9

1 Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Démontrons l'énoncé suivant : pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est multiple de 3. Soit n un entier naturel. Par exemple $n = 4$. On a alors $n^3 - n = 4^3 - 4 = 4\left(4^2 - 1\right) = 4.15 = 4.3.5$ qui est bien multiple de 3. La proposition est donc démontrée ».
2 Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Démontrons l'énoncé suivant : il existe un entier naturel n tel que $n^2 - n$ n'est pas multiple de 3. Si $n = 2$, on a $n^2 - n = 4 - 2 = 2$ qui n'est pas multiple de 3. La proposition est donc démontrée ».

Exercice 10

Démontrer par contraposition l'énoncé suivant : si n un entier naturel dont le carré est pair, alors n est pair.

Exercice 11

Démontrer par contraposition la formule suivante : $\forall x \in \mathbf{R},\ x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$.

Exercice 12

Démontrer par l'absurde l'énoncé suivant : soit x un réel positif tel que, pour tout réel $y > 0$, on a $x \leq y$. Alors $x = 0$.

Exercice 13

Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre entier.

Exercice 14

1 Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $2^n < n! \Rightarrow 2^{(n+1)} < (n+1)!$.
2 Montrer que, pour tout entier $n \geq 5$, on a $2^n < n!$.
3 Déterminer un entier A tel que pour tout $n \geq A$, on ait $3^n < n!$.

Exercice 15

Démontrer par récurrence la formule suivante : $\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.

Exercice 16

1 Montrer que, pour tout entier n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
2 Montrer que, pour tout entier n, si $10^n + 7$ est multiple de 9, alors $10^{n+1} + 7$ l'est aussi. Que peut-on en déduire ?

Exercice 17

Démontrez que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y aura au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

Exercice 18

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier n et pour tout réel $x > 0$, on a :$(1+x)^n \geq 1 + nx$.
1 La récurrence porte-t-elle sur le paramètre n ? Sur le paramètre x ? Sur les deux ?
2 Formuler l'hypothèse de récurrence.
3 Vérifier que $(1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2$.
4 Rédiger la démonstration.

Exercice 19

1 Montrer par récurrence sur n les formules

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2 Que vaut, si n est impair, la somme $1 + 3 + 5 + \cdots + n$?
3 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 20

1 Déterminer deux nombres réels a et b tels que l'on ait, pour tout nombre réel $x > 0$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 21

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour $n \geq 0$.

1 Démontrer que, pour tout entier n, on a $u_n \geq n^2$.

2 On définit une suite (v_n) en posant, pour tout entier n, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Exprimer v_n en fonction de n.

3 Exprimer $u_n - u_0$ en fonction de $v_0, v_1, ..., v_{n-1}$, puis calculer u_n en fonction de n.

Exercice 22

Lire attentivement la démonstration par récurrence de l'affirmation suivante : « tous les crayons de couleur d'une même boîte B sont de la même couleur ». Soit B une boîte de crayons de couleurs. Si cette boîte contient un crayon, alors l'énoncé est vrai. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que le résultat soit vrai pour toute boîte B de n crayons. Soit maintenant B de $n+1$ crayons, en en retirant un, on obtient une boîte B' ayant n crayons. Par hypothèse de récurrence, ils sont tous les n de la même couleur c. Remettons le crayon retiré à nouveau dans B. Si l'on en retire un autre, on obtient une nouvelle boîte B'', dont tous les crayons ont même couleur d. Comme des crayons appartiennent à la fois à B' et B'', tous les crayons de B possèdent la même couleur $c = d$. Que pensez-vous de cette démonstration ?

Exercice 23

On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison a et on pose $U_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $U_n = (n+1)(u_0 + \frac{1}{2}an)$.

Exercice 24

On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison a et on pose encore $U_n = u_0 + \cdots + u_n$. On suppose que $a \neq 1$; montrer alors que $U_n = u_0 \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. Que vaut U_n dans le cas où $a = 1$?

Exercice 25

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 1$.

1 Déterminer un nombre réel a tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.

2 En déduire une formule simple pour v_n puis une formule simple pour u_n.

3 Déduire de l'exercice une *méthode générale* pour calculer le n-ième terme d'une suite (u_n) définie par une récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, où a et b sont des nombres réels.

Exercices à chercher

Exercice 26

Pour tout entier naturel $\mathbf{N}$, on note P_n la formule $2^n > n^2$.

1 Montrer que la formule $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vraie pour $n \geq 3$.

2 Pour quelles valeurs de l'entier n, P_n est-elle vraie ?

Exercice 27

Montrer, par récurrence sur n, la formule suivante : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbf{N},\ (1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 28

Le but de cet exercice est de montrer que « l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas ».

Énoncé de l'exercice : Il s'agit de montrer que l'existence d'un ensemble dont les éléments sont tous les ensembles aboutit à une contradiction. Supposons qu'il existe un tel ensemble X. En considérant l'ensemble $y = \{x \in X,\ x \notin x\}$, aboutir à la contradiction cherchée (indication : y appartient-il à y ? cf. également le paradoxe du barbier ci-dessous). Ainsi l'ensemble X ne peut pas exister.

Commentaires : La découverte de ce « paradoxe » par le logicien Bertrand Russel en 1901 a permis par la suite de dégager de « bons » axiomes pour la formalisation de la théorie des ensembles. Une version « grand public » de ce paradoxe est connue sous le nom de *paradoxe du barbier* : le barbier du village est celui qui rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et eux seulement ; le barbier se rase-t-il lui même ?

Exercice 29

La suite (u_n) est définie par $u_1 = 1/2$ et $u_n = u_{n-1}/(2nu_{n-1} + 1)$, si $n \geq 2$. Calculer $u_1 + \cdots + u_n$, pour tout entier n. (Commencez par calculer explicitement cette somme pour de petites valeurs de n, conjecturez alors une formule générale que vous démontrerez ensuite par récurrence.)

Exercice 30

On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = 1$ et, si $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n/(1 + u_n)$.

1 Montrer que l'on a $u_n > 0$, pour tout entier n.

2 Montrer que la suite $(1/u_n)$ est arithmétique.

3 Calculer u_n, pour tout entier n.

Exercice 31

1 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout entier naturel n, la formule de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

2 On note $\mathcal{P}_n$ la propriété « $u_n = 1 + 2^n$ » Montrer en adaptant le raisonnement par récurrence que pour tout n entier, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice 32

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. On cherche une formule close pour le terme général de cette suite.

1 Calculer u_2, u_3, u_4.

2 Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'assertion

$$u_n = 2^{n+1} - 3^n \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2^{n+2} - 3^{n+1}$$

Démontrer par récurrence sur n, que, pour tout entier naturel n, la proposition P_n est vraie.

3 Conclure.

Exercices pour aller plus loin

Exercice 33

1 Soit $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ une famille de $n \times m$ nombres réels. Montrer par récurrence sur n :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

2 En déduire, si $(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq i}}$ est une autre famille de nombres réels :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} b_{ij}.$$

Indication : pour appliquer le résultat précédent, on pourra compléter la famille par des zéros.

3 Calculer

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{n-j+1}.$$

Exercice 34

On définit la relation suivante sur l'ensemble des nombres entiers naturels : $n \sim m$ si la somme des chiffres de n dans l'écriture décimale est égale à celle de m.

Est-ce une relation réflexive ? symétrique ? anti-symétrique ? transitive ?

Exercice 35

On définit la relation suivante sur l'ensemble des nombres entiers naturels : $n\{m$ si la somme des chiffres de n dans l'écriture décimale est inférieure à celle de m.

1 Comparer 56, 89, 1211 et 4322.

2 Est-ce une relation réflexive ? symétrique ? anti-symétrique ? transitive ?

Exercice 36

Montrer que la relation $<$ (définie sur l'ensemble des entiers naturels) est anti-symétrique. Est-ce une relation d'ordre sur $\mathbf{N}$?

Exercice 37

1. Soit $p_1, p_2, \ldots, p_r$, r nombres premiers. Montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \ldots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i.
2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 38

Démontrer en raisonnant par l'absurde qu'il n'existe aucun entier n vérifiant $12\,n^3 - 7\,n = 1$.

Exercice 39

1 Soit E un ensemble. On considère les deux assertions $A_1 = \forall x \in E \quad (P(x)$ ou $Q(x))$ et $A_2 = (\forall x \in E \quad P(x))$ ou $(\forall x \in E \quad Q(x))$. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies : $A_1 \Rightarrow A_2$, $A_2 \Rightarrow A_1$, $A_1 \Leftrightarrow A_2$?

2 Même question avec les assertions $A_1 = \exists x \in E \quad (P(x)$ ou $Q(x))$ et $A_2 = (\exists x \in E \quad P(x))$ ou $(\exists x \in E \quad Q(x))$.

Exercice 40

Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$;
4. $\forall \epsilon > 0 \, \exists \alpha > 0 \ / \ |x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \epsilon$.

Exercice 41

Montrer que $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$ tel que $(n \geq N \Rightarrow 2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \epsilon)$.

Exercice 42

Montrer par l'absurde la proposition suivante : si n est un entier naturel non nul, $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.