UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 1

Corrigé succinct du contrôle continu
vendredi 7 novembre 2014

Exercice 1 *(2.5 points)*

Montrer que la proposition ci-dessus est vraie.

$$\forall a \in \mathbf{Z},\ \forall b \in \mathbf{Z}, ab \text{ pair ou } a^2 - b^2 \text{ multiple de } 8.$$

On raisonne par cas

- *Si a ou b est pair, le produit ab est pair et la proposition est donc vraie.*
- *Sinon, a et b sont impairs et il existe donc k et l entiers tels que $a = 2k + 1$ et $b = 2l + 1$.*

$$a^2 - b^2 = (2k+1)^2 - (2l+1)^2 = 4(k^2 - l^2 - k - l) = 4(k-l)(k+l+1).$$

  - *Si k et l ont la même parité, $k - l$ est multiple de 2 et donc $a^2 - b^2$ multiple de 8. La proposition est vraie dans ce sous-cas.*
  - *Sinon, k et l ont des parités différentes, $k + l + 1$ est donc pair. La proposition est aussi vraie dans ce sous-cas.*

La proposition est donc vraie dans tous les cas.

Exercice 2 *(2.5 points)*

Démontrer, en raisonnant par récurrence, que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

- *Initialisation : pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1(1+1) = 2$ et $\frac{1}{3}1(1+1)(1+2) = 2$. La formule est donc vraie pour $n = 1$.*
- *Hérédité : soit n un entier naturel supérieur à 1 tel que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2)\\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)\\ &= (n+1)(n+2)\left[\frac{1}{3}n + 1\right] = (n+1)(n+2)\frac{n+3}{3}\\ &= \frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1+2).\end{aligned}$$

  La formule est donc héréditaire.
- *Conclusion : la formule $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ est donc vraie pour tout n entier supérieur à 1.*

Exercice 3 *(2 points)*

Soient n et p deux entiers naturels tels que $2 \leq p \leq n$. Montrer l'égalité

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$$

1. par le calcul ;
Par définition d'un coefficient binomial, on a

$$\begin{array}{rcl}\binom{n-2}{p-2}+2\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p} & = & \frac{(n-2)!}{(p-2)!(n-p)!}+2\frac{(n-2)!}{(p-1)!(n-p-1)!}+\frac{(n-2)!}{(p)!(n-p-2)!} \\ & = & \frac{(n-2)!}{(p)!(n-p)!}\left[p(p-1)+2p(n-p)+(n-p)(n-p-1)\right] \\ & = & \frac{(n-2)!}{(p)!(n-p)!}\left[n^2-n\right]=\frac{(n-2)!}{(p)!(n-p)!}n(n-1)=\frac{(n)!}{(p)!(n-p)!} \\ & = & \binom{n}{p}\end{array}$$

2. par une interprétation combinatoire. (*Indication : considérer un ensemble fini E de cardinal n et deux éléments distincts de E*)
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un ensemble fini à n éléments. Soient a et b deux élements distincts de E. a et b existent car $|(|E)\geq 2$.
$\binom{n}{p}$ est le nombre de sous-ensembles de E à p éléments.
On choisit les ensembles à p éléments de la manière suivante :

- *ceux qui ne contiennent ni a, ni b : il faut donc choisir p éléments dans l'ensemble $E\setminus\{a,b\}$. Il y a $\binom{n-2}{p}$ tels sous-ensembles ;*
- *ceux qui contiennent a, mais pas b : il faut donc choisir $p-1$ éléments dans $E\setminus\{a,b\}$. Il y a $\binom{n-2}{p-1}$ tels sous-ensembles ;*
- *ceux qui contiennent b, mais pas a : il faut donc choisir $p-1$ éléments dans $E\setminus\{a,b\}$. Il y a $\binom{n-2}{p-1}$ tels sous-ensembles ;*
- *ceux qui contiennent a et b : il faut donc choisir $p-2$ éléments dans $E\setminus\{a,b\}$. Il y a $\binom{n-2}{p-2}$ tels sous-ensembles.*

Le choix ainsi fait permet d'assurer que l'on a bien tous les sous-ensembles à p éléments et qu'on ne les compte pas deux fois. On en déduit alors l'égalité demandée.

Exercice 4 *(3 points)*

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application quelconque. On se donne $A\subset E$ et $B\subset F$.
1. Énoncer les définitions d'image directe et d'image réciproque.
L'image directe d'un sous-ensemble A de E est l'ensemble noté $f(A)$ et défini par
$f(A)=\{f(x)\,;\,x\in A\}=\{y\in F\,;\,\exists x\in A, y=f(x)\}$.
L'image réciproque d'un sous-ensemble B de F est l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ et défini par
$f^{-1}(B)=\{x\in E\,;\,f(x)\in B\}$.
2. Prouver que $f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B$.
Soit $y\in f(A\cap f^{-1}(B))$. Alors il existe $x\in A\cap f^{-1}(B)$ tel que $y=f(x)$. On a donc $x\in A$ et $f(x)\in B$ par définition d'une image réciproque. On en déduit que $y=f(x)\in f(A)\cap B$. On a ainsi montré l'inclusion $f(A\cap f^{-1}(B))\subset f(A)\cap B$.
Soit $y\in f(A)\cap B$. Alors $y\in f(A)$ donc il existe $x\in A$ tel que $y=f(x)$. Comme $f(x)\in B$, on a également $x\in f^{-1}(B)$. Donc $x\in A\cap f^{-1}(B)$ et on en déduit que $y\in f(A\cap f^{-1}(B))$.

Exercice 5 *(5 points)*

On lance une pièce n fois. On associe à chaque tirage un élément de $\{P,F\}^n$.
Par exemple, si $n=4$, l'élément (P,P,F,F) de $\{P,F\}^4$ correspond à « *pile aux deux premiers lancers et face aux deux derniers* ».
On souhaite calculer le nombre de tirages p_n possibles pour lesquels on n'a pas obtenu "pile" deux fois consécutivement.
On pose

$$E_n=\Big\{(a_1,\cdots,a_n)\in\{P,F\}^n \mid \forall i\in\{1,\cdots,n-1\},(a_i,a_{i+1})\neq(P,P)\Big\},$$

de sorte que

$$p_n=\mathrm{Card}(E_n).$$

1. Calculer p_1, p_2 et p_3 en déterminant E_1, E_2 et E_3.
On a $E_1 = \{(P),(F)\}$ *et* $p_1 = 2$, $E_2 = \{(P,F),(F,P),(F,F)\}$ *et* $p_2 = 3$ *puis* $E_3 = \{(P,F,F),(P,F,P),(F,P,F),(F$
et $p_3 = 5$.

2. On note $F_n = \{(a_1,\cdots,a_n) \in E_n \mid a_1 = P\}$ et $G_n = \{(a_1,\cdots,a_n) \in E_n \mid a_1 = F\}$.

(i) Donner la définition d'une partition d'un ensemble en deux parties et montrer que F_n et G_n forment une partition de E_n.
Deux sous-ensembles F *et* G *d'un ensemble* E *forment une partition de* E *si et seulement si* $F \cap G = \emptyset$ *et* $E = F \cup G$. *Etant donné que* $a_1 \in \{P,F\}$ *on a* $E_n = F_n \cup G_n$, *de plus* $F_n \cap G_n = \emptyset$ *car* $P \neq F$.

(ii) Prouver que $(a_1,\cdots,a_n) \in F_n$ si, et seulement si, $a_1 = P$ et $a_2 = F$ et $(a_3,\cdots,a_n) \in E_{n-2}$.
Si $(a_1,\cdots,a_n) \in F_n$ *alors* $a_1 = P$. *Comme* $(a_1,a_2) \neq (P,P)$ *alors* $a_2 = F$. *Enfin,* $F_n \subset E_n$ *donc par définition de* E_n, *pour tout* $i \geq 3$ *on a* $(a_i,a_{i+1}) \neq (P,P)$. *Par conséquent* $(a_3,\cdots,a_n) \in E_{n-2}$. *Réciproquement, si* $a_1 = P$ *et* $a_2 = F$ *alors* $(a_1,a_2) \neq (P,P)$ *et* $(a_2,a_3) \neq (P,P)$. *De plus, si* $(a_3,\cdots,a_n) \in E_{n-2}$ *alors pour tout* $i \geq 1$ $(a_i,a_{i+1}) \neq (P,P)$ *et* $(a_1,\cdots,a_n) \in E_n$ *et donc est un élément de* F_n.

(iii) Définir une bijection entre F_n et E_{n-2} et en déduire le cardinal de F_n.
Il suffit de considérer l'application allant de F_n *dans* E_{n-2} *qui à* $(a_1,\cdots,a_n)$ *associe* $(a_3,\cdots,a_n)$. *On a nécessairement* $a_1 = P$ *et* $a_2 = F$ *aussi peut on considérer l'application allant de* E_{n-2} *dans* F_n *qui à* $(a_3,\cdots,a_n)$ *associe* $(P,F,a_3,\cdots,a_n)$. *Ces deux applications sont réciproques l'une de l'autre et sont donc bijectives. Par voie de conséquence, on a* $Card(F_n) = card(E_{n-2})$.

(iv) Prouver que $(a_1,\cdots,a_n) \in G_n$ si, et seulement si, $a_1 = F$ et $(a_2,\cdots,a_n) \in E_{n-1}$. En déduire que $\mathrm{Card}(G_n) = p_{n-1}$.
On fait le même raisonnement qu'à la question précédente en traitant les deux implications séparément. On en déduit que $Card(G_n) = card(E_{n-1}) = p_{n-1}$.

(v) En déduire que $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$ et calculer p_6.
Comme F_n *et* G_n *partitionnent* E_n *on en déduit que* $Card(E_n) = card(F_n) + card(G_n)$. *En utilisant les questions précédentes on obtient* $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$. *Comme* $p_2 = 3$ *et* $p_3 = 5$ *on récupère* $p_4 = 5+3 = 8$, $p_5 = 8+5 = 13$ *et* $p_6 = 13+8 = 21$.

Exercice 6 *(5 points)*

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein (1896) dans deux cas particuliers. Ce théorème affirme la chose suivante : étant donnés deux ensembles E et F, et deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ toutes deux **injectives**, il existe toujours une application $\Phi : E \to F$ qui est **bijective**.
On suppose que $E = \mathbf{N}$ et $F = 2\mathbf{N}$, où $2\mathbf{N}$ est l'ensemble des entiers naturels pairs, et que les applications f et g sont définies par :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & 2x+4 \end{array} \quad \text{et } g : \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2}+2 \end{array}$$

1. Montrer que les applications f et g sont injectives. Sont-elles surjectives ?
Soient x *et* x' *dans* E *tels que* $f(x) = f(x')$. *Alors* $2x+4 = 2x'+4$ *donc* $x = x'$. *Ainsi* f *est injective. De même si* $g(x) = g(x')$ *alors* $\frac{x}{2}+2 = \frac{x'}{2}+2$ *puis* $x = x'$. *Dès lors* g *est injective. En revanche,* f *n'est pas surjective car* $2 \in F$ *n'a pas d'antécédent par* f. *De même,* g *n'est pas surjective car* $1 \in E$ *n'a pas d'antécédent par* g.
On définit l'ensemble X par

$$X = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists i \in \mathbf{N},\ n = 4i \text{ ou } n = 4i+1\}$$

2. Déterminer $f(X)$. Montrer que l'application v suivante est bijective :

$$v : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & f(X) \\ x & \to & f(x). \end{array} \right.$$

Soit $n \in X$. *Par définition on a* $n \equiv 0 \pmod 4$ *ou* $n \equiv 1 \pmod 4$. *Alors on a* $f(n) = 2n + 4 \equiv 4 \pmod 8$ *ou* $f(n) = 2n + 4 \equiv 6 \pmod 8$. *Donc*

$$f(X) \subset \{m \in \mathbb{N} \mid n \equiv 4 \pmod 8 \text{ ou } n \equiv 6 \pmod 8\}.$$

Réciproquement, si $n \equiv 4 \pmod 8$ *ou* $n \equiv 6 \pmod 8$ *alors il existe* $i \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 8i + 4$ *ou* $n = 8i + 6$. *On a alors* $n = f(4i)$ *ou* $n = f(4i + 1)$ *donc* $n \in f(X)$. *Ainsi*

$$f(X) = \{m \in \mathbb{N} \mid n \equiv 4 \pmod 8 \text{ ou } n \equiv 6 \pmod 8\}.$$

On remarque que v *est la restriction de* f *à* X. *D'après la question 1.,* f *est injective donc* v *aussi. Par ailleurs* v *est surjective puisque par définition, pour tout* $y \in f(X)$ *il existe* $x \in X$ *tel que* $y = f(x)$ *et comme* $x \in X$ *on a aussi* $y = v(x)$. *Ainsi* v *est injective et surjective, donc bijective.*

3. Montrer que $g(F \setminus f(X)) = E \setminus X$.

Soit $y \in F \setminus f(X)$. *Alors* $y \in F$ *donc* y *est pair et* $y \notin f(X)$ *donc* y *n'est congru ni à* 4 *ni à* 6 *modulo* 8. *Donc* y *est congru soit à* 0 *soit à* 2 *modulo* 8. *Alors* $g(y) = \frac{y}{2} + 2$ *est congru soit à* 2 *soit à* 3 *modulo* 4. *Donc* y *n'est congru ni à* 0 *ni à* 1 *modulo* 4. *Ainsi* $g(y) \in E \setminus X$. *On en déduit que* $g(F \setminus f(X)) \subset E \setminus X$.

Réciproquement si $x \in E \setminus X$ *alors* $x \equiv 2 \pmod 4$ *ou* $x \equiv 3 \pmod 4$. *Si* $x \equiv 2 \pmod 4$ *il existe un entier naturel* i *tel que* $x = 4i + 2$. *Alors* $x = \frac{8i}{2} + 2 = g(8i)$ *et* $8i \in F \setminus f(X)$ *d'après la question précédente. De même si* $x \equiv 3 \pmod 4$ *il existe un entier naturel* j *tel que* $x = 4j + 3$. *Alors* $x = \frac{8j+2}{2} + 2 = g(8j + 2)$ *et* $8j + 2 \in F \setminus f(X)$ *d'après la question précédente. Ainsi* $x \in g(F \setminus f(X))$ *puis* $E \setminus X \subset g(F \setminus f(X))$ *et enfin* $g(F \setminus f(X)) = E \setminus X$.

4. Montrer que l'application u suivante est bijective :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} F \setminus f(X) & \to & E \setminus X \\ y & \to & g(y). \end{array} \right.$$

Notons tout d'abord que la définition de u *est légitime d'après la question précédente. D'après cette dernière on a* $g(F \setminus f(X)) = E \setminus X$ *de sorte que* u *est surjective. De plus* g *est injective donc* u *aussi. Ainsi* u *est bijective.*

5. Construire alors une application $\Phi : E \to F$ qui soit bijective. *Soit* $x \in E$. *Si* $x \in X$ *posons* $\Phi(x) = v(x)$. *Si* $x \notin X$ *posons* $\Phi(x) = u^{-1}(x)$. *Cette définition est légitime car* u *est bijective. Les questions précédentes impliquent (le vérifier) que* Φ *est une bijection.*