Algèbre et Arithmétique 1

Feuille n^o 2
Théorie des ensembles, applications

Exercices à savoir faire

Théorie des ensembles

Exercice 1

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des femmes. Qu'est-ce qu'un élément $x \in \mathcal{F}$? Pour tout élément $x \in \mathcal{F}$, on note $B(x)$ l'assertion « x est brune » et $N(x)$ l'assertion « x a les yeux noirs ».

1 Sous la forme d'un schéma, représenter, dans $\mathcal{F}$, l'ensemble $\mathcal{B}$ des éléments x de $\mathcal{F}$ pour lesquels $B(x)$ est vraie, et l'ensemble des éléments y de $\mathcal{F}$ pour lesquels $N(x)$ est vraie.

2 Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
$\forall x \in \mathcal{F},\ (B(x) \text{ ou } N(x))$;
$(\forall x \in \mathcal{F},\ B(x))$ ou $(\forall x \in \mathcal{F},\ N(x))$.

3 Expliquer ce que signifierait que ces assertions soient vraies, puis fausses.

Exercice 2

1 Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que $A \cap \mathcal{C}_E(B) \neq \emptyset \iff A \not\subset B$.

2 Soient P et Q deux assertions. Montrer que $(P \text{ et non } (Q)) \iff \text{non}(P \implies Q)$.

Exercice 3

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E.
Si $C \subset A \cup B$, a-t-on forcément $C \subset A$ ou $C \subset B$?

Exercice 4

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Montrer les formules suivantes :

1 $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.

2 $A \backslash B = A \Leftrightarrow B \backslash A = B$.

3 $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \mathcal{C}_E B = A \cap \mathcal{C}_E C$.

Exercice 5

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Montrer les formules suivantes :

1 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

2 $\mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E A) = A$

3 $\mathcal{C}_E(A \cap B) = (\mathcal{C}_E A) \cup (\mathcal{C}_E B)$

4 $\mathcal{C}_E(A \cup B) = (\mathcal{C}_E A) \cap (\mathcal{C}_E B)$

Illustrer les résultats avec des patates et des couleurs.

Exercice 6

Soit E un ensemble. Démontrer les formules suivantes :

1 $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad (A \cup B \subset A \cap B) \Rightarrow A = B$,

2 $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), \quad (A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C$.

3 $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Exercice 7

Montrer que l'ensemble $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ ; \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ ne peut s'écrire comme produit cartésien de deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Déterminer toutes les parties de $E = \{0, 1, 2, 3\}$.

Exercice 9

1 Soit $E = \{0, 1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$, $E \times E$ et $\mathcal{P}(E \times E)$.
2 Déterminer $F = \mathcal{P}(\emptyset)$ et $\mathcal{P}(F)$.

Exercice 10

Soient E et F deux ensembles.
1 Un sous-ensemble X de $E \cup F$ est-il toujours de la forme $A \cup B$ où A appartient à $\mathcal{P}(E)$ et B appartient à $\mathcal{P}(F)$?
2 Un sous-ensemble X de $E \times F$ est-il toujours de la forme $A \times B$ où A appartient à $\mathcal{P}(E)$ et B appartient à $\mathcal{P}(F)$?

Applications

Exercice 11

1 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to x^2$, et soit $A = [-1, 4]$. Déterminer l'image directe $f(A)$ de A par f, puis l'image réciproque $f^{-1}(A)$ de A par f.
2 On considère la fonction sinus $sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Quelle est l'image directe, par sin, de $\mathbf{R}$? de $[0, 2\pi]$? de $[0, \pi/2]$?
3 Quelle est l'image réciproque, par sin, de $[0, 1]$? de $[3, 4]$? de $[1, 2]$?

Exercice 12

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
1 $f_0 : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $n \to 2n$.
2 $f_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^*$, $n \to n + 1$.
3 $f_2 : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $n \to -n$.
4 $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to x^2$.
5 $f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $x \to x^2$.
6 $f_5 : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \to z^2$.

Exercice 13

1 Dessiner un graphe qui ne représente pas une application.
2 Dessiner, si possible, le graphe d'une application surjective f et d'une application g dont la composée $f \circ g$ ne soit pas surjective.
3 Dessiner, si possible, le graphe d'une application surjective f et d'une application g dont la composée $g \circ f$ ne soit pas surjective.
4 Dessiner, si possible, le graphe d'une application surjective f et d'une application g surjective dont la composée $g \circ f$ ne soit pas surjective.
5 Reprendre les questions précédentes avec « injective » au lieu de « surjective ».

Exercice 14

Soient E, F et G trois ensembles, $h : E \to F$, $f : F \to G$ et $g : F \to G$ trois applications. $g \circ h = f \circ h$ implique-t-il que $g = f$? Et si h est injective ? surjective ?

Exercice 15

Soient les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 16

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Montrer que :

1 $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$.

2 $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$.

3 A-t-on égalité en général ?

Exercice 17

Soient E et F deux ensembles et f une application $E \to F$.

1 Démontrer les formules suivantes :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$,
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$,
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
5. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
6. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
7. $\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

2 La formule $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset B \Leftrightarrow f(A) \subset f(B)$ est-elle toujours vraie ? On pourra, si besoin, donner un contre-exemple.

3 La formule $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ est-elle toujours vraie ? On pourra, si besoin, donner un contre-exemple.

Exercice 18

Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1 f est injective.

2 Pour toutes les parties A et B de X, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercices à chercher

Théorie des ensembles

Exercice 19

1 Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ dont tous les éléments sont strictement plus grands que 100. Que peut-on dire du plus grand élément du complémentaire de A ?

2 Donner (si possible) l'exemple de deux sous-ensembles A et B de $\mathbf{N}$ tels que le plus petit élément de $A \cap B$ ne soit ni le plus petit élément de A, ni le plus petit élément de B.

3 Donner (si possible) l'exemple de deux sous-ensembles A et B de $\mathbf{N}$ tels que le plus petit élément de $A \cup B$ ne soit ni le plus petit élément de A, ni le plus petit élément de B.

Exercice 20

Soit E un ensemble et A et B des parties de E.

1 Déterminer toutes les parties X de E vérifiant $A \cup X = B$ (on pourra commencer par remarquer que si A n'est pas inclus dans B, de telles parties n'existent pas ; il reste à examiner le cas où A est inclus dans B ; on pourra s'aider de patates).

2 Déterminer toutes les parties X de E vérifiant $A \cap X = B$.

Exercice 21

Pour n entier naturel, on note $p(n)$ le nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Le nombre de parties du produit cartésien $A \times B$ d'un ensemble A à 5 éléments avec un ensemble B à 4 éléments est-il le produit $p(5) \times p(6)$? (Sinon que représente le nombre $p(5) \times p(6)$?)

Exercice 22

Le but de cet exercice est de montrer que « l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas ».

Énoncé de l'exercice : Il s'agit de montrer que l'existence d'un ensemble dont les éléments sont tous les ensembles aboutit à une contradiction. Supposons qu'il existe un tel ensemble X. En considérant l'ensemble $y = \{x \in X,\ x \notin x\}$, aboutir à la contradiction cherchée (indication : y appartient-il à y ? cf. également le paradoxe du barbier ci-dessous). Ainsi l'ensemble X ne peut pas exister.

Commentaires : La découverte de ce « paradoxe » par le logicien Bertrand Russel en 1901 a permis par la suite de dégager de « bons » axiomes pour la formalisation de la théorie des ensembles. Une version « grand public » de ce paradoxe est connue sous le nom de *paradoxe du barbier* : le barbier du village est celui qui rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et eux seulement ; le barbier se rase-t-il lui même ?

Applications

Exercice 23

Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X, X)$, on définit $f^0 = id$ et, par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$.

1 Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}\ f^{n+1} = f \circ f^n$.

2 Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbf{N}\ (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.

Exercice 24

Soient E un ensemble et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$ une application, telle que, pour toutes les parties disjointes A et B de E, on ait $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

1 Montrer que $f(\emptyset) = 0$.

2 Montrer que, pour toutes les parties A et B de E, on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.

Exercice 25

Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. Soit l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

1 Démontrer que : f injective $\iff A \cup B = E$.

2 Déemontrer que : f surjective $\iff A \cap B = \emptyset$.

3 À quelle condition f est-elle bijective ? Expliciter alors f^{-1}.

Exercices pour aller plus loin

Exercice 26

Le principe d'inclusion-exclusion donne lieu à des inégalités : si $A_1, \dots, A_n$ sont des parties d'un ensemble X, montrer par exemple que

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \leq \left| \bigcup_i A_i \right| \leq \sum_i |A_i| \,.$$

Généraliser.

Exercice 27

Les trois premières questions sont indépendantes de la dernière :

1 Déterminer une bijection entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^*$.

2 En déduire une bijection entre $\{1/n, n \geq 1\}$ et $\{1/n, n \geq 2\}$.

3 En déduire une bijection entre $[0,1]$ et $[0,1[$.

4 Trouver une bijection entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$.

Exercice 28

Soit X un ensemble et f une application de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X. On note A l'ensemble des $x \in X$ vérifiant $x \notin f(x)$. Démontrer par l'absurde qu'il n'existe aucun $x_0 \in X$ tel que $A = f(x_0)$. En déduire qu'il n'existe pas de bijection entre X et $\mathcal{P}(X)$.

Exercice 29

Soit X un ensemble. Si $A \subset X$, on note χ_A la fonction caractéristique associée : $\chi_A : X \to \{0,1\}$ définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Montrer que l'application Φ, définie ci-dessous, est bijective :

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{F}(X, \{0,1\}) \\ & & A & \mapsto & \chi_A \end{array}$$

Exercice 30

Soient E et F des ensembles. On suppose qu'il existe une application injective $f : E \to F$ et une application injective $g : E \to F$. On se propose de montrer qu'il existe alors une bijection de E sur F. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Cantor-Bernstein* ou parfois *théorème de Cantor-Bernstein-Schröder*.

1 Montrer le résultat si l'on suppose en outre que E ou F est un ensemble fini.

2 Désormais on suppose E et F quelconques. Soit $h = g \circ f$ et $G = E \setminus g(F)$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties X de E vérifiant $G \cup h(X) \subset X$. Montrer que $\mathcal{F}$ est non vide et que si $X \in \mathcal{F}$ alors $G \cup h(X) \in \mathcal{F}$.

3 Soit A l'ensemble des éléments x de E tels que pour tout $X \in \mathcal{F}$ on a $x \in X$. En d'autres termes $A = \cap_{X \in \mathcal{F}} X$. Montrer qu'on a $G \subset A$, puis que A appartient à $\mathcal{F}$, puis que $G \cup h(A) = A$ (pour cette dernière propriété, utiliser le dernier point de la question précédente).

4 Soit $B = E \setminus A$, $A' = f(A)$ et $B' = g^{-1}(B)$. Montrer qu'on a $A' \cap B' = \varnothing$ et $A' \cup B' = F$.

5 Montrer que l'application $\varphi : E \to F$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

est une bijection de E sur F.