UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

PARTIEL

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie... Durée : 2 heures

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes. On rappelle que la fonction courbure d'une courbe paramétrée régulière plane est $\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t),\ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3}$ et que la fonction torsion d'une courbe de l'espace $\mathbb{R}^3$ régulière dont la vitesse et l'accélération ne sont pas collinéaires est $\tau(t) = \frac{\det(\dot{c}(t),\ddot{c}(t),\dddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\wedge\ddot{c}(t)\|^2}$.

Exercice 1 (6 points)

1 La courbe paramétrée suivante est-elle régulière ?

$$\begin{array}{rcl} c : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}. \end{array}$$

2 On fixe deux nombres réels $a < b$. Comparer la longueur de la portion de la courbe c paramétrée par $[a, b]$ et $\sqrt{2}(b-a)$.
3 Déterminer une surface quadrique qui contient l'image $\mathcal{C}$ de la courbe c.
4 Déterminer un déplacement (non égal à l'identité) de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui conserve l'image $\mathcal{C}$ de la courbe c.
5 Décrire par un dessin l'allure de la courbe $\mathcal{C}$.
6 Calculer la fonction torsion de la courbe c.

Exercice 2 (6 points)

La courbure moyenne de la surface paramétrée suivante est-elle partout nulle ?

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \cosh(u)\cos(v) \\ \cosh(u)\sin(v) \\ u \end{pmatrix}. \end{array}$$

Exercice 3 (4 points)

On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ t(1-t^2) \\ s \end{pmatrix}. \end{array}$$

1 Déterminer des déplacements de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui conservent l'image de F.
2 Montrer que l'image de F est l'ensemble d'équation $y^2 = x^2(1-x)$.
3 L'image de F est-elle une surface régulière de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4 (4 points)

Trouver les extrema de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto xy$ sur la sphère unité.