UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Corrigé du Partiel

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (6 points)

1 La courbe paramétrée suivante est-elle régulière ?

$$\begin{array}{rcl} c : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}. \end{array}$$

Réponse. *Les composantes de l'application c sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. La dérivée de la dernière composante n'est jamais nulle. La courbe c est donc régulière.*

2 On fixe deux nombres réels $a < b$. Comparer la longueur de la portion de la courbe c paramétrée par $[a, b]$ et $\sqrt{2}(b - a)$.

Réponse. *Pour tout paramètre t, $\| \dot{c}(t) \| = \sqrt{2 + t^2} \geq \sqrt{2}$. Donc,*

$$L[c_{|[a,b]}] = \int_a^b \| \dot{c}(t) \| \, dt \geq \sqrt{2}(b - a).$$

3 Déterminer une surface quadrique qui contient l'image $\mathcal{C}$ de la courbe c.

Réponse. *Soit $t \in \mathbb{R}$,*

$$(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2 = t^2 = (t)^2.$$

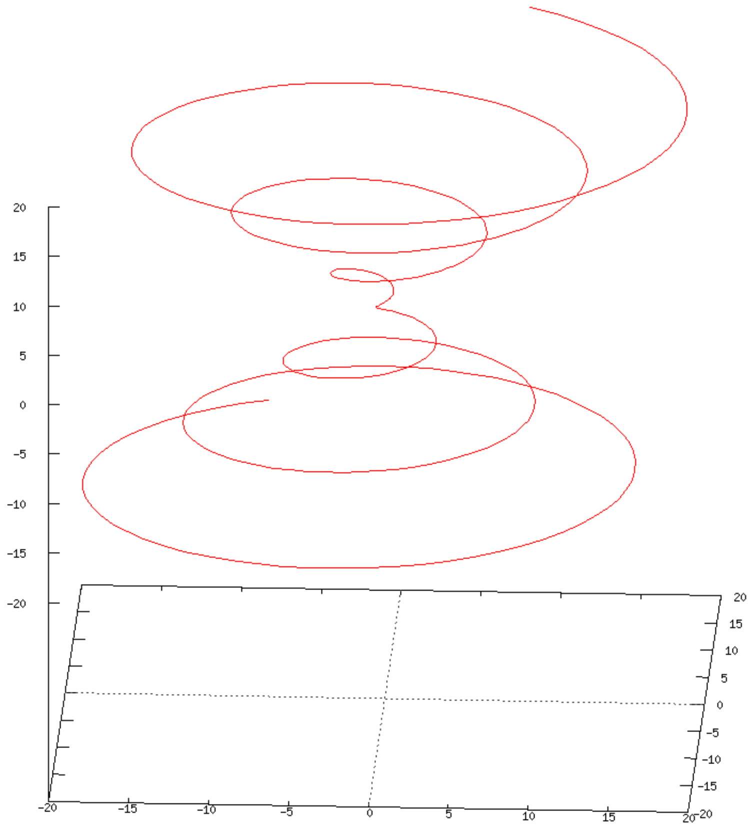
Par conséquent, $\mathcal{C}$ est dans la quadrique d'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

4 Déterminer un déplacement (non égal à l'identité) de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui conserve l'image $\mathcal{C}$ de la courbe c.

Réponse. *Soit $t \in \mathbb{R}$, $c(-t) = \begin{pmatrix} -t\cos t \\ t\sin t \\ -t \end{pmatrix}$ et se déduit donc de $c(t)$ par le demi-tour autour de l'axe des ordonnées (d'équation $x = z = 0$).*

5 Décrire l'allure de la courbe $\mathcal{C}$.

Réponse.



6 Calculer la fonction torsion de la courbe c.

Réponse.

$$c(t)=\begin{pmatrix} t\cos t\\ t\sin t\\ t\end{pmatrix};\dot c(t)=\begin{pmatrix}\cos t-t\sin t\\ \sin t+t\cos t\\ 1\end{pmatrix};\ddot c(t)=\begin{pmatrix}-2\sin t-t\cos t\\ 2\cos t-t\sin t\\ 0\end{pmatrix};\dddot c(t)=\begin{pmatrix}-3\cos t+t\sin t\\ -3\sin t-t\cos t\\ 0\end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\det\begin{pmatrix}\cos t-t\sin t & -2\sin t-t\cos t & -3\cos t+t\sin t\\ \sin t+t\cos t & 2\cos t-t\sin t & -3\sin t-t\cos t\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=t^2+6$$

Par ailleurs,

$$\dot c(t)\wedge\ddot c(t)=\begin{pmatrix}\cos t-t\sin t\\ \sin t+t\cos t\\ 1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2\sin t-t\cos t\\ 2\cos t-t\sin t\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cos t+t\sin t\\ -2\sin t-t\cos t\\ 2+t^2\end{pmatrix}$$

dont la norme au carré est t^4+5t^2+8*. La fonction torsion de* c *est donc*

$$\tau(t)=\frac{t^2+6}{t^4+5t^2+8}.$$

Exercice 2 (6 points)

La courbure moyenne de la surface paramétrée suivante est-elle partout nulle ?

$$\begin{array}{ccc} F : \mathbb{R}\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \cosh(u)\cos(v) \\ \cosh(u)\sin(v) \\ u \end{pmatrix} \end{array}.$$

Réponse. *L'application F est injective et différentiable car ses composantes le sont. On calcule*

$$X =_u= \frac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix} \sinh(u)\cos(v) \\ \sinh(u)\sin(v) \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_v = \frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\cosh(u)\sin(v) \\ \cosh(u)\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour déterminer le rang de dF, qui est donc 2. Par conséquent, l'image S de F est une surface régulière. On peut aussi déterminer

$$G = \cosh^2 u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On s'en sert aussi pour trouver un champs de vecteurs normaux unitaires différentiable $N = \frac{1}{\cosh u}\begin{pmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ \sinh u \end{pmatrix}$. On peut ensuite, soit calculer

$$W(X_u) = -dN \cdot X_u = -\frac{\partial N}{\partial u} = -(\cosh^{-2} u)X_u \text{ et } W(X_v) = -dN \cdot X_v = -\frac{\partial N}{\partial u} = (\cosh^{-2} u)X_v$$

et en déduire que les valeurs propres de l'endomorphisme de Weingarten W sont $-\cosh^{-2} u$ et $\cosh^{-2} u$. Donc, W est de demi-trace nulle, et la courbure moyenne de ImF est partout nulle.

On peut aussi calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$ pour obtenir $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $G^{-1} = \cosh^{-2} u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Donc $W = G^{-1}H = \begin{pmatrix} -\cosh^{-2} u & 0 \\ 0 & \cosh^{-2} u \end{pmatrix}$. Comme la demi-trace de W est nulle, la surface S est partout de courbure moyenne nulle.

Exercice 3 (4 points)

On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} F : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ t(1-t^2) \\ s \end{pmatrix} \end{array}.$$

1 Déterminer des déplacements de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui conserve l'image de F.

Réponse. *Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $a_i n\mathbb{R}$, $c(t+a) = t_{(0,0,a)}(c(t))$, l'image de F est invariante par toutes les translations de vecteur parallèle à $\vec{k}$, le troisième vecteur de la base canonique.*

On remarque aussi que $F(-t,-s)$ s'obtient à partir de $F(t,s)$ par le demi-tour d'axe des abscisses. Ce demi-tour conserve donc l'image de F.

2 Montrer que l'image de F est l'ensemble d'équation $y^2 = x^2(1-x)$.

Réponse. *Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,*

$$(1-t^2)^2(1-(1-t^2)) = (1-t^2)^2 t^2 = [t(1-t^2)]^2.$$

Donc, l'image de F est incluse dans l'ensemble d'équation $y^2 = x^2(1-x)$.

Soit (x, y, z) *inclus dans l'ensemble d'équation* $y^2 = x^2(1-x)$. *Si* $x = 0$, $y = 0$ *et* $(x, y, z) = F(1, z)$. *Si* $x \neq 0$, *soit* $s = z$ *et* $t = y/x$. *On vérifie que* $F(t, s) = (x, y, z)$.

Donc, l'image de F *est l'ensemble d'équation* $y^2 = x^2(1-x)$.

3 L'image de F est-elle une surface régulière de $\mathbb{R}^3$?

Réponse. *Au voisinage du point* $(0, 0, 0)$ *de l'image de* S, *la projection sur le plan* $x = 0$ *donne a chaque point deux antécédents, la projection sur la plan* $y = 0$ *aussi, et la projection sur la plan* $z = 0$ *donne à chaque point soit une infinité, soit aucun antécédent. Par conséquent, au voisinage de* $(0, 0, 0)$ *l'image de* S *n'est pas un graphe. L'image de* F *n'est donc pas une surface régulière de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 (4 points)

Trouver les extrema de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto xy$ sur la sphère unité.

Réponse. *On note* S *la sphère unité de* $\mathbb{R}^3$. *La fonction* f *est différentiable sur la sphère comme restriction d'une fonction polynomiale sur* $\mathbb{R}^3$. *La fonction* f *continue sur le compact* S *atteint ses extrema. En un point extremal, la différentielle de la fonction* f *restreinte à l'espace tangent doit être nulle. Le gradient de* f *doit donc être normal à l'espace tangent. On trouve que le vecteur* $\begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ *doit être parallèle au vecteur* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. *Comme* x, y *et* z *ne sont pas simultanément nuls sur* S, $z = 0$ *et* $x^2 = y^2$. *Puisque* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = \pm 1/\sqrt{2}$ *et* $y = \pm 1/\sqrt{2}$. *En comparant les valeurs en ces quatres points, on trouve que le minimum absolu de la fonction* f *est donc* $-1/2$ *atteint au deux points* $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ *et* $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. *Le maximum absolu de la fonction* f *est donc* $1/2$ *atteint au deux points* $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ *et* $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.