UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Examen de décembre 2013

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie... Durée : 2 heures

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (4 points)

On considère la courbe paramétrée

$$\begin{array}{rccc} c : &]0,1[& \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ 4t \end{pmatrix} \end{array}$$

1 La courbe c est-elle régulière ?

2 Paramétrer l'image de c par la longueur d'arc.

3 Déterminer en tout point de c le repère de Frenet.

Exercice 2 (6 points)

On considère l'application

$$\begin{array}{rcc} F :]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} (2+\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ (2+\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \end{array}$$

1 Représenter l'image T de F.

2 Montrer que T est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

3 Déterminer la courbure de Gauss K de T avec la métrique induite par le produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$, c'est à dire la première forme fondamentale. (Expliquer d'abord votre démarche globale. Tout résultat intermédiaire sera pris en compte).

4 Calculer $\int_T K(m)d\sigma(m)$.

Exercice 3 (5 points)

On considère l'application

$$\begin{array}{rcc} F :]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} (2+\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ (2+\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \end{array}$$

1 Montrer qu'on définit une métrique riemmannienne sur $Im(F) = T$ en posant $g(\frac{\partial F}{\partial \varphi}) = g(\frac{\partial F}{\partial \theta}) = 1$ et $g(\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \theta}) = 0$.

2 Déterminer la courbure de Gauss K de T avec la métrique g. (Expliquer d'abord votre démarche globale. Tout résultat intermédiaire sera pris en compte).

3 Calculer $\int_T K(m)d\sigma(m)$.

Tourner s.v.p.

Exercice 4 (5 points)

Soit S une surface différentiable munie d'une métrique riemannienne g. Soit p et q deux points fixés sur S. Soit ϵ un nombre réel strictement positif. Soit $a \leq b$ deux nombres réels. Soit $C :]-\epsilon, \epsilon[\times [a, b] \to S$ une application différentiable vérifiant pour tout $s \in]-\epsilon, \epsilon[$, $C(s, a) = p$ et $C(s, b) = q$. On notera $c_s(t) := C(s, t)$, $V(t) := \frac{\partial C}{\partial s}_{(0,t)}$. On admettra l'identité des dérivées covariantes

$$\nabla_{V(t)} \dot{c_0}(t) = \nabla_{\dot{c_0}(t)} V(t).$$

1 Représenter sur un dessin S, l'application C et le champs de vecteurs V, en particulier $V(a)$ et $V(b)$.

2 Rappeler la définition de l'énergie $E[c_s]$ de la courbe $c_s : [a, b] \to S$.

3 Exprimer à l'aide de la dérivée covariante $\nabla_{\dot{c_0}(t)} \dot{c_0}(t)$, la dérivée $\frac{dE[c_s]}{ds}_{s=0}$.

Un corrigé sera disponible sur internet