UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Examen de décembre 2013 (Corrigé)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie... Durée : 2 heures

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (4 points)

On considère la courbe paramétrée

$$\begin{array}{rccc} c & : &]0,1[& \to & \mathbb{R}^3 \\ & & t & \mapsto & \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ 4t \end{pmatrix} \end{array}$$

1 La courbe c est-elle régulière ?

Réponse. *Comme les composantes de c sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La dérivée de la dernière coordonnée ne s'annule jamais. La courbe c est donc régulière.*

2 Paramétrer l'image de c par la longueur d'arc.

Réponse. *Le vecteur vitesse*

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -3\sin t \\ 3\cos t \\ 4 \end{pmatrix}$$

est de norme 5. Comme la courbe c est régulière, on peut trouver un paramétrage par longueur d'arc. Le paramétrage

$$\begin{array}{rccc} e & : &]0,5[& \to & \mathbb{R}^3 \\ & & s & \mapsto & \begin{pmatrix} 3\cos(s/5) \\ 3\sin(s/5) \\ 4s/5 \end{pmatrix} \end{array}$$

de la forme $e(s) = c(\phi(s))$ est un reparamétrage par longueur d'arc, car de/ds est partout de norme 1.

3 Déterminer en tout point de c le repère de Frenet.

Réponse. *On utilise le paramétrage par longueur d'arc. Le premier vecteur est le vecteur vitesse* $\dot{e}(s) = v(s) = \begin{pmatrix} -3/5\sin(s/5) \\ 3/5\cos(s/5) \\ 4/5 \end{pmatrix}$. *Le deuxième est le vecteur normal. Le vecteur accélération est* $\ddot{e}(s) = \begin{pmatrix} -3/25\cos(s/5) \\ -3/25\sin(s/5) \\ 0 \end{pmatrix}$. *On trouve que la courbure est $3/25$ et le vecteur normal* $n(s) = \begin{pmatrix} -\cos(s/5) \\ -\sin(s/5) \\ 0 \end{pmatrix}$. *Le troisième vecteur est le vecteur binormal* $b(s) = v(s) \wedge n(s) =$

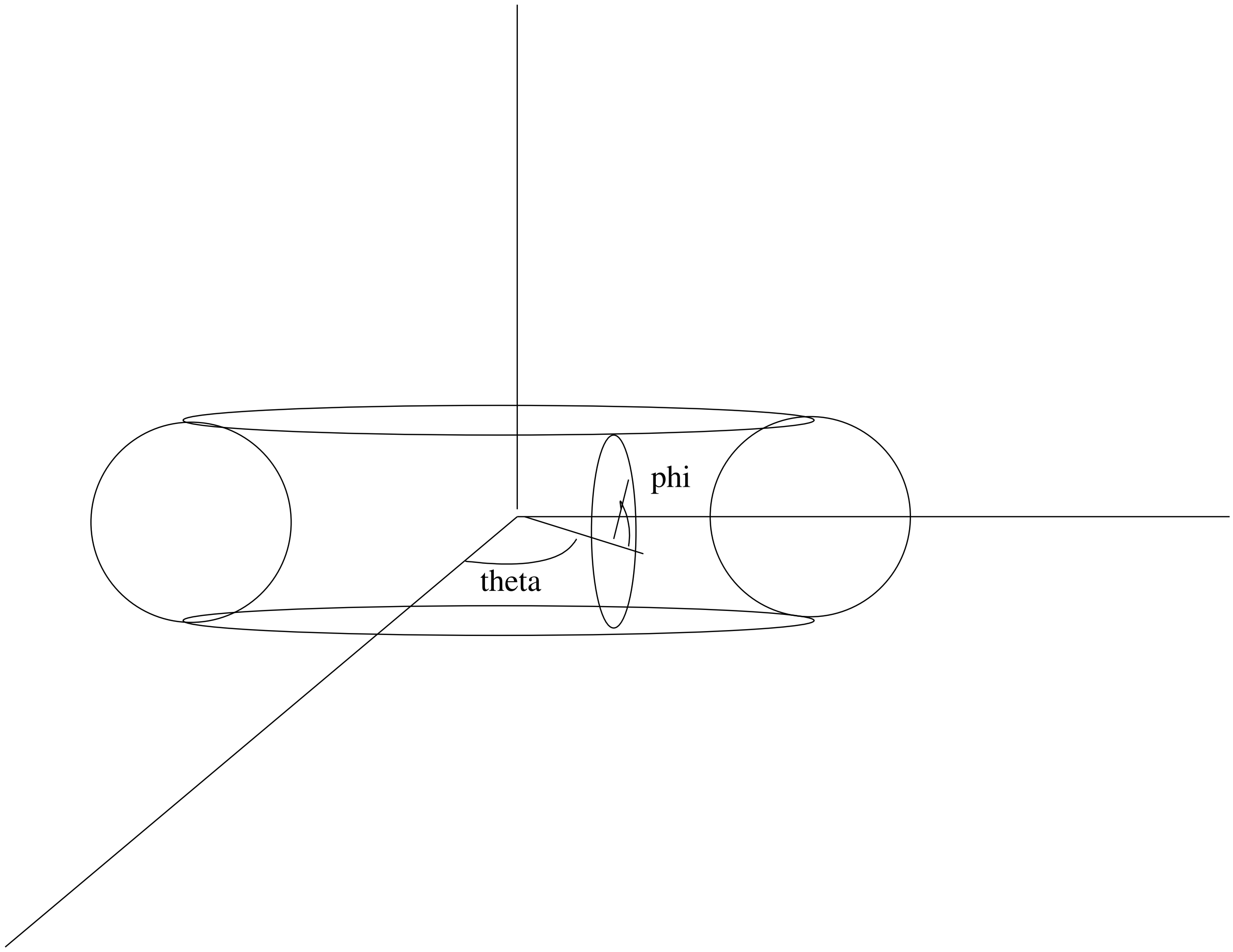
$$\begin{pmatrix} -3/5\sin(s/5) \\ 3/5\cos(s/5) \\ 4/5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos(s/5) \\ -\sin(s/5) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5\sin(s/5) \\ -4/5\cos(s/5) \\ 3/5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (6 points)

On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} F :]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} (2+\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ (2+\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \end{array}$$

1 Représenter l'image T de F.



Réponse.

2 Montrer que T est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

Réponse. *L'application F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et injective. On calcule* $X_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ *et* $X_\theta = \begin{pmatrix} -(2+\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ (2+\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$. *Si $\varphi \neq 0$, $\sin(\varphi) \neq 0$ et les deux premières coordonnées sont indépendantes. Si $\varphi = 0$,* $X_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $X_\theta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$ *sont indépendants. Ainsi, dF est partout de rang 2 donc un homéomorphisme local. Puisqu'elle est injective, l'application F est donc un paramétrage. L'image T est donc une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.*

3 Déterminer la courbure de Gauss K de T avec la métrique induite par le produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$, c'est à dire la première forme fondamentale.(Expliquer d'abord votre démarche globale. Tout résultat intermédiaire sera pris en compte).

Réponse. *On détermine d'abord la matrice de la première forme fondamentale*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\cos(\varphi))^2 \end{pmatrix}$$

On choisit comme champs de vecteurs normaux unitaires

$$N = -\frac{X_\varphi \wedge X_\theta}{2+\cos(\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

On détermine ensuite l'endomorphisme de Weingarten W par

$$WX_\varphi = \frac{\partial N}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = X_\varphi \text{ et } WX_\theta = \frac{\partial N}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\cos(\varphi)}{2+\cos(\varphi)} X_\theta$$

On en déduit que les valeurs propres de W sont 1 et $\frac{\cos(\varphi)}{2+\cos(\varphi)}$, et que la courbure de Gauss est donc $K(\varphi,\theta) = \frac{\cos(\varphi)}{2+\cos(\varphi)}$.

4 Calculer $\int_T K(m)d\sigma(m)$.

Réponse.

$$\begin{aligned} \int_T K(m)d\sigma(m) &= \int_{]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[} K(\varphi,\theta)\sqrt{detG}\,d\varphi d\theta \\ &= \int_{]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[} \frac{\cos(\varphi)}{2+\cos(\varphi)}(2+\cos(\varphi))d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi)d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Exercice 3 (6 points)

On considère l'application

$$\begin{array}{rcc} F :]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} (2+\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ (2+\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}. \end{array}$$

1 Montrer qu'on définit une métrique riemmannienne sur $Im(F) = T$ en posant $g(\frac{\partial F}{\partial \varphi}) = g(\frac{\partial F}{\partial \theta}) = 1$ et $g(\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \theta}) = 0$.

Réponse. *Comme F est un paramétrage de la surface régulière T, les vecteurs $X_\varphi = \frac{\partial F}{\partial \varphi}$ et $X_\theta = \frac{\partial F}{\partial \theta}$ sont indépendants et forment une base de l'espace tangent à T en $F(\varphi,\theta)$. La matrice imposée est bien celle d'un produit scalaire. Comme elle est constante, elle dépend de façon $\mathcal{C}^\infty$ de (φ,θ).*

2 Déterminer la courbure de Gauss K de T avec la métrique g.

Réponse. *Comme la matrice de la métrique riemannienne est constante, les symboles de Christoffel sont nuls en tous points et le tenseur de courbure est identiquement nul. On en déduit que la coubure de Gauss est identiquement nulle.*

3 Calculer $\int_T K(m)d\sigma(m)$.

Réponse. *D'après la question précédente $\int_T K(m)d\sigma(m) = 0$*

Exercice 4 (4 points)

Soit S une surface différentiable munie d'une métrique riemannienne g. Soit p et q deux points fixés sur S. Soit ϵ un nombre réel strictement positif. Soit $a \leq b$ deux nombres réels. Soit $C :]-\epsilon, \epsilon[\times [a, b] \to S$ une application différentiable vérifiant pour tout $s \in]-\epsilon, \epsilon[$, $C(s, a) = p$ et $C(s, b) = q$. On notera $c_s(t) := C(s, t)$, $V(t) := \frac{\partial C}{\partial s}_{(0,t)}$. On admettra l'identité des dérivées covariantes

$$\nabla_{V(t)} \dot{c_0}(t) = \nabla_{\dot{c_0}(t)} V(t).$$

1 Représenter sur un dessin S, l'application C et le champs de vecteurs V, en particulier $V(a)$ et $V(b)$.

Réponse. *Question de cours*

2 Rappeler la définition de l'énergie $E[c_s]$ de la courbe $c_s : [a, b] \to S$.

Réponse. *Question de cours*

3 Exprimer à l'aide de la dérivée covariante $\nabla_{\dot{c_0}(t)} \dot{c_0}(t)$, la dérivée $\frac{dE[c_s]}{ds}_{s=0}$.

Réponse. *Question de cours*