UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

FEUILLE DE TD N°6, CALCULS SUR LES SURFACES RÉGULIÈRES DE $\mathbb{R}^3$

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (Dérivées covariantes)

1 Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P} = (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \{0\} &\to \mathcal{C} = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 / Z > 0, X^2 + Y^2 = 1/3Z^2\} \\ (x,y,0) &\mapsto \frac{1}{2\sqrt{X^2+Y^2}}(X^2 - Y^2, 2XY, \sqrt{3}(X^2+Y^2)) \end{aligned}$$

est une isométrie locale.

2 On considère dans le plan $\mathcal{P}$ la courbe paramétrée par $c : t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$. Déterminer son image d dans le cône épointé $\mathcal{C}$. Déterminer l'image $v(t)$ du champs de vecteurs constant $(1,0,0)$ par la différentielle de f au point $c(t)$. Calculer $c(2\pi) - c(0)$. Calculer la dérivée covariante $\frac{\nabla}{dt}v(t)$ du champs de vecteur $v(t)$ sur le cône $\mathcal{C}$ le long de la courbe d.

Exercice 2 (Isométries locales)

1 Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : P = \mathbb{R}^2 \times \{0\} &\to C = S^1 \times \mathbb{R} \\ (t,y,0) &\mapsto (\cos t, \sin t, y) \end{aligned}$$

est une isométrie locale.

2 Les courbures principales des surfaces régulières sont-elles des quantités intrinsèques ? La courbure moyenne des surfaces régulières est elle une quantité intrinsèque ?

3 Déterminer un champs de vecteurs non nul à dérivée covariante nulle le long de la courbe du cylindre C d'équation $Z = 0$.

Exercice 3 (Dérivées covariantes)

1 Soit $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. On considère sur la sphère unité la courbe paramétrée par $c : t \mapsto (\cos\theta\cos t, \cos\theta\sin t, \sin\theta)$. Calculer la dérivée covariante du champs de vecteurs $\dot{c}(t)$ sur S le long de c.

Exercice 4 (Symboles de Christoffel)

Déterminer les symboles de Christoffel de la sphère unité au point $(1,0,0)$.

Exercice 5 (Symboles de Christoffel et première forme fondamentale)

On considère une surface régulière S de $\mathbb{R}^3$ et un paramétrage local F. On note $X_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}$

1 Rappeler la formule de calcul de $\frac{\partial}{\partial u_k} I(X_i, X_j)$.

2 Montrer que $\frac{\partial}{\partial u_k} g_{ij} = \sum_m (\Gamma_{ki}^m g_{mj} + \Gamma_{kj}^m g_{mi})$.

3 Calculer de même $\frac{\partial}{\partial u_i} g_{kj}$ et $\frac{\partial}{\partial u_j} g_{ik}$.

4 Déterminer les symboles de Christoffel en fonction des coefficients de la première forme fondamentale.

Exercice 6 (Calculs sur un ellipsoïde)

Dans tout cet exercice, on considère un ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$ dans $\mathbb{R}^3$.

1 Paramétrer $\mathcal{E}$ en coordonnées sphériques au voisinage du point $p(1,0,0)$. On notera F ce paramétrage.

2 Déterminer un champs de vecteurs normaux unitaires $N(u)$ au point $F(u)$.

3 Calculer la matrice $G(u)$ de la première forme fondamentale I dans la base $X_i(u) := \frac{\partial F}{\partial u_i}$ de $T_{F(u)}\mathcal{E}$ correspondant à ce paramétrage F. Calculer $G^{-1}(u)$.

4 Calculer l'endomorphisme de Weingarten à l'aide de la définition et du champs de vecteurs normaux N.

5 Calculer l'endomorphisme de Weingarten à l'aide des dérivées secondes du paramétrage F et du champs de vecteurs normaux N.

6 Calculer la courbure de Gauss.

7 Calculer la matrice $H(u)$ de la seconde forme fondamentale II dans la base $X_i(u)$.

8 Calculer les symboles de Christoffel de la base $X_i(u)$ à l'aide des dérivées secondes du paramétrage F.

9 Calculer les symboles de Christoffel de la base $X_i(u)$ à l'aide de la matrice $G(u)$ par la formule

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} \right) g^{mk}.$$

10 Calculer $\nabla^2_{X_i X_j} X_k$ en p à l'aide de la définition des dérivées secondes covariantes.

11 Calculer les valeurs $R(X_i, X_j)X_k$ de l'endomorphisme de courbure en p à l'aide de la définition.

12 Déterminer les valeurs $R(X_i, X_j)X_k$ de l'endomorphisme de courbure en p à l'aide de l'équation de Gauss

$$R(X_i, X_j)X_k = II(X_j, X_k)W(X_i) - II(X_i, X_k)X_j.$$

13 Retrouver la courbure de Gauss en p à l'aide de la formule $K(p) = I(R_p(V,W)W, V)$ du théorème Egreguim où (V, W) est une base orthonormée de $T_p\mathcal{E}$.

14 Calculer les valeurs $R(X_i, X_j)X_k$ de l'endomorphisme de courbure en p à l'aide de la formule

$$R(X_i, X_j)X_k = K(p)[I(X_j, X_k)X_i - I(X_i, X_k)X_j].$$