Géométrie différentielle

FEUILLE DE TD N°5, ETUDE DES SURFACES AU SECOND ORDRE

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

1. Calcul d'aires

Exercice 1 (Sphère)

1 Calculer l'aire de la sphère en coordonnées sphériques.
2 Calculer l'aire de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$.

Exercice 2 (Calcul d'aire)

On considère l'application f de la sphère unité $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans le cylindre $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ donnée en coordonnées cartésiennes par

$$f \; : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z \end{pmatrix}.$$

1 Faire une figure pour décrire géométriquement cette application.
2 On considère un paramétrage local de la sphère unité $\mathcal{S}$ en coordonnées polaires

$$F : (\theta, \phi) \in]0, 2\pi[\times]0, \pi[\quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Déterminer la première forme fondamentale de la sphère dans cette paramétrisation.
3 On considère l'application $G = f \circ F$. Montrer que c'est un paramétrage local du cylindre $\mathcal{C}$ et calculer la première forme fondamentale du cylindre dans cette paramétrisation.
4 L'application f est-elle un difféomorphisme local ? un difféomorphisme de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{C}$?
5 L'application f est-elle une isométrie locale ? conserve-t-elle les aires ?
6 En déduire l'aire de la portion de sphère entre deux grands cercles passant par les poles nord et sud et faisant entre eux un angle de mesure α. Vérifier en déterminant l'aire de la sphère.

2. Cartographie

Exercice 3 (Applications conformes)

Soit g et g' deux produits scalaires euclidiens sur $\mathbb{R}^n$. Montrer en utilisant la règle des sinus dans un triangle $a/\sin\hat{A} = b/\sin\hat{B}$ que g et g' définissent les mêmes mesures d'angle non orientés si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que $g = cg'$.

Exercice 4 (Cartes)

On cherche des applications d'un ouvert du plan $\mathbb{R}^2$ dans un ouvert de la sphère S^2 de $\mathbb{R}^3$ qui conservent les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires.
1 Traduire chacune de ces trois propriétés à l'aide des formes fondamentales.
2 Les coordonnées sphériques donnent-elles une application qui conserve les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires ?
3 La projection stéréographique depuis le pôle nord conserve-t-elle les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires ?

4 L'application du cylindre dans la sphère

$$\begin{array}{ccc}]0,2\pi[\times]-1,1[& \to & S^2 \\ (\theta,h) & \mapsto & \begin{pmatrix} \sqrt{1-h^2}\cos\theta \\ \sqrt{1-h^2}\sin\theta \\ h \end{pmatrix} \end{array}$$

conserve-t-elle les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires ?

5 L'application du cylindre dans la sphère

$$\begin{array}{ccc}]0,2\pi[\times]-\infty,+\infty[& \to & S^2 \\ (\theta,x) & \mapsto & \begin{pmatrix} \sqrt{1-h^2(x)}\cos\theta \\ \sqrt{1-h^2(x)}\sin\theta \\ h(x) \end{pmatrix} \end{array}$$

avec $h(x) = \tanh(x)$ conserve-t-elle les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires ?

3. Seconde forme fondamentale

Exercice 5 (Sphère)

Calculer la seconde forme fondamentale de la sphère. En déduire sa courbure de Gauss et ses directions principales.

Exercice 6 (Cylindre)

1 Déterminer les plans tangents et un champs de vecteurs normaux au cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$.

2 Déterminer l'application de Weingarten en chaque point p du cylindre.

3 En déduire sa courbure de Gauss et ses directions principales.

4 Reprendre les questions précédentes pour le paraboloïde hyperbolique d'équation $z = y^2 - x^2$ au point $p(0,0,0)$.

Exercice 7 (Point hyperbolique/elliptique)

Donner l'exemple d'une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ avec un point hyperbolique et un point elliptique.

4. Surfaces réglées

Exercice 8 (Définition)

1 Une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ est dite réglée si elle admet des paramétrages locaux de la forme $F(t,s) = c(t) + sv(t)$ pour $t,s) \in I \times J$ où c est une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$ paramétrée sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et $v\ : I \to \mathbb{R}^3_{ev}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $v(t)$ et $\dot{c}(t)$ partout indépendant. Montrer que si J est un petit intervalle autour de 0, F est alors un paramétrage régulier.

2 Montrer que la courbure de Gauss d'une surface réglée est négative en tout point.

Exercice 9 (Exemples)

1 Montrer qu'un cylindre est une surface réglée.

2 Montrer qu'un paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$ est réglé sur la droite d'équation $y = z = 0$.

3 Montrer qu'un hyperboloïde à une nappe d'équation $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ est réglé sur le cercle à l'altitude 0.