UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Feuille de TD n°4, Applications différentiables entre surfaces

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (Applications différentiables entre surfaces)

Soit S_1 et S_2 deux surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$.

1 Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que $g(S_1) \subset S_2$. On note $f : S_1 \to S_2$ la restriction de g à S_1. Montrer f est une application différentiable.

2 Soit $f : S_1 \to S_2$ une application différentiable et p un point de S_1. Montrer qu'il existe un voisinage de p dans $\mathbb{R}^3$ sur lequel f se prolonge en une application $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

3 Montrer que la composée de deux applications différentiables entre surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$ est différentiable et expliciter la différentielle de la composée.

Exercice 2 (Différentielle)

Soit S_1 d'équation $x^6 + y^6 + z^6 = 1$ et S_2 d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1 Montrer que S_1 et S_2 sont deux surfaces régulières.

2 On considère l'application f de S_1 vers S_2, qui à p de coordonnées (x, y, z) associe le point de coordonnées (x^3, y^3, z^3). Montrer que f est bijective de S_1 sur S_2.

3 Montrer que f est différentiable.

4 Déterminer la différentielle de f. Est-elle inversible ?

5 La bijection réciproque f^{-1} est-elle différentiable ?

6 Reprenez l'exercice pour l'application g de S_1 vers le plan d'équation $z = 0$, qui à p de coordonnées (x, y, z) associe le point de coordonnées $(x, x, 0)$.

Exercice 3 (Première forme fondamentale)

Calculer la première forme fondamentale du graphe S d'une application $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On pourra déterminer d'abord un paramétrage global de S.

Exercice 4 (Dépendance en le paramétrage)

1 On considère le plan d'équation $z = 0$ avec le paramétrage $\left\{ \begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, 0). \end{array} \right.$
Déterminer la matrice de la première forme fondamentale dans la base $\mathcal{B}_F$ correspondante.

2 On considère le plan d'équation $z = 0$ avec le paramétrage local

$$\begin{array}{rcl} G :]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta, 0). \end{array}$$

Déterminer la matrice de la première forme fondamentale dans la base $\mathcal{B}_G$ correspondante.

3 Déterminer la matrice de changement de base au point de coordonnées $(1, 0, 0)$ de la base $\mathcal{B}_F$ dans la base $\mathcal{B}_G$. Relier les deux matrices obtenues pour la première forme fondamentale.

Exercice 5 (Théorème d'inversion locale)

Énoncer et démontrer le théorème d'inversion locale pour une application entre deux surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$.