UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Feuille de TD n°3, Surfaces

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

1. Exemples de surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 1 (Plans)

Montrer que le plan d'équation $x + y + z = 1$ est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (Surfaces paramétrées)

La surface paramétrée par $(u, v) \mapsto (u + v^2, u^2 - v^2, v)$ est-elle régulière au voisinage de $A(1, -1, -1)$?

Exercice 3 (Surfaces implicites)

1 L'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ est-il une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Le décrire.
2 L'ensemble d'équation $(x^2 + y^2 + z^2 - 4)^2 = 0$ est-il une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Le décrire.
3 L'ensemble d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ est-il une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Le décrire. Montrer que tous les chemins du point $A(1, 0, 1)$ au point $B(1, 0, -1)$ passent par un même point à déterminer.
4 Les ensembles d'équation respective

$$a) x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 2z = 5 \qquad b) 2x^2 + 3y^2 = 1$$
$$c) \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 1 \qquad d) \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{4} = -1$$

sont-ils des surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$? Les décrire.

Exercice 4 (paramétrages de la sphère)

On considère la sphère S unité dans $\mathbb{R}^3$.
1 Déterminer par une expression en coordonnées de la projection stéréographique d'un ouvert U de S (à déterminer) depuis le pôle nord sur le plan d'équation $z = 0$. Vérifier qu'il s'agit bien de paramétrage de U.
2 Faîtes de même depuis le pôle sud.
3 Montrer que le changement de paramétrage est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
4 Interprétér les coordonnées sphèriques comme un paramétrage de la sphère S.

2. Applications régulières

Exercice 5 (Applications régulières ?)

1 La restriction à la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = -5$ de la fonction $(x, y, z) \mapsto 5x^6 + 7xy^4 - 2$ est-elle différentiable ?
2 La restriction à la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = -5$ de la fonction $(x, y, z) \mapsto \sqrt{|x|}$ est-elle différentiable ?

Exercice 6 (Difféomorphismes)

1 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que le graphe de f est difféomorphe à U.
2 Les surfaces $\mathcal{E}$ d'équation $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$ et $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sont-elles difféomorphes ?
3 Les surfaces $\mathcal{C}$ d'équation $2x^2 + 3y^2 = 1$ et $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sont-elles difféomorphes ?

3. Plans tangents

Exercice 7 (Détermination de plan tangent)

1 Déterminer le plan tangent en $A(1, -1, -1)$ à la surface paramétrée par $(u, v) \mapsto (u+v^2, u^2 - v^2, v)$.
2 Déterminer le plan tangent en $A(1, 1, -1)$ à la surface d'équation $x^5 + y^5 + z^5 = 1$.
3 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Déterminer le plan tangent au graphe de f en chacun de ses points.

Exercice 8 (Plan tangent)

Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2(2z^2 + y^2) + x = 0$.
1 La surface S est-elle régulière ?
2 Paramétrer la surface S (de manière polynomiale) en prenant les paramètres u et v parmi les variables x, y et z.
3 Déterminer une base de l'espace tangent à la surface S en $A(-6, 1, -1)$.
4 Calculer un vecteur normal à la surface S en $A(-6, 1, -1)$.
5 Le vecteur $V = (27, -29, -1)$ appartient-il au plan tangent à S en $A(-6, 1, -1)$?

Exercice 9 (Plan tangent)

1 Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $F : (u, v) \mapsto (u + v^2, u^2 - v^2, v)$ au point $M(u_0, v_0)$ de paramètres (u_0, v_0).
2 Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^5 + y^5 + z^5 = 1$ au point $M(x_0, y_0, z_0)$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0).
3 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent au graphe de f en chacun de ses points.

Exercice 10 (Détermination de minima)

Dans tout l'exercice, r et h parcourt $]0, +\infty[$
1 Déterminer le volume $V(r, h)$ d'un cylindre plein de hauteur h et de rayon r.
2 Déterminer l'aire $A(r, h)$ d'une casserole de hauteur h et de rayon r.
3 Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ avec coordonnées (r, h, v) d'équation $1 = V(r, h)$ est une surface régulière.
4 Déterminer le gradient de la fonction $\alpha : (r, h, v) \mapsto A(r, h)$ et celui de la fonction $\nu : (r, h, v) \mapsto V(r, h) - 1$
5 Soit (r_0, h_0, v_0) un minimum de la fonction α sur la surface d'équation $1 = V(r, h)$. Comparer $grad_{(r_0,h_0,v_0)}\alpha$ et $grad_{(r_0,h_0,v_0)}\nu$.
6 Déterminer le minimum de $A(r, h)$ sur la surface d'équation $V(r, h) = 1$. Interpréter ce résultat.