UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Feuille de TD n°2, Courbes

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n.

1. Courbes planes

Exercice 1 (Calculs de courbure)

On considère l'espace affine euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1 Calculer la fonction courbure d'un cercle de rayon $r > 0$.

2 Soit $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc. Soit R la rotation de centre 0 et d'angle α, et S la symétrie d'axe $x = y$. Déterminer la fonction courbure de $R \circ c$ et celle de $S \circ c$.

3 Calculer la fonction courbure de la courbe de Lissajou $\left\{ \begin{array}{cccc} c : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \end{array} \right.$

4 Déterminer une courbe fermée à courbure partout strictement négative.

5 Montrer qu'une courbe plane régulière de courbure nulle est un segment de droite.

Exercice 2 (Courbure en un point extremal)

Soit $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc. On suppose que c reste dans le disque de rayon r et qu'au point de paramètre τ, $\| c(\tau) \| = r$.

1 Montrer en dérivant une fois la fonction $t \mapsto \| c(t) \|^2$ que $\ddot{c}(\tau)$ est colinéaire à $c(\tau)$?

2 Montrer en dérivant à nouveau la fonction $t \mapsto \| c(t) \|^2$ que la courbure en τ vérifie $|\kappa(\tau)| \geq 1/r$.

Exercice 3 (Construction d'une courbe plane à courbure prescrite)

Le but de l'exercice est de montrer le théorème suivant.

Theorem 1. *Soit I un intervalle et $\kappa : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors, il existe une courbe plane $c : I \to \mathbb{R}^2$ paramétrée par la longueur d'arc et de fonction courbure κ. Cette courbe est unique à composition au but par un déplacement près.*

1 On considère le système d'équations différentielles linéaire du premier ordre

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c \\ v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ v \\ n \end{pmatrix}.$$

où les fonctions $c, v, n : I \to \mathbb{R}^2$ sont les inconnues. Montrer que ce système admet une unique solution $(c(t), v(t), n(t))$ avec pour valeur initiale un vecteur fixé (c_0, v_0, n_0) avec (v_0, n_0) base orthonormée directe.

2 Écrire un système d'équations différentielles linéaire du premier ordre satisfait par le vecteur $(< v, v >, < n, n >, < v, n >)$.

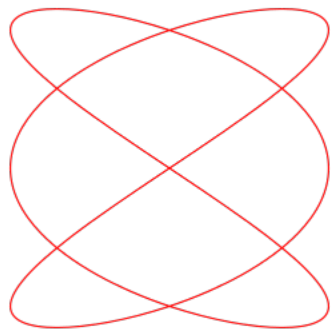
3 Montrer que pour les solutions obtenues précédemment, $(v(t), n(t))$ reste un repère orthonormé direct.

4 En déduire que la courbe c obtenue est paramétrée par la longueur d'arc et que sa fonction courbure est κ.

5 Conclure.

Exercice 4 (Nombre de rotation)

Calculer le nombre de rotation de la courbe régulière fermée suivante



Exercice 5 (Courbure totale)

1 Calculer la somme des mesures des angles extérieurs d'un triangle et d'un carré.

2 Déterminer la fonction courbure et la courbure totale de l'ovale paramétré par $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t))$.

2. Courbes de $\mathbb{R}^3$

Exercice 6 (Formules de Frenet)

Démontrer les formules de Frenet pour les courbes paramétrées par la longueur d'arc dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 (Torsion)

1 Calculer la torsion de l'hélice $\left\{\begin{array}{cccc} c & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & t & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \end{array}\right.$.

2 Calculer la torsion de la courbe de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $t \mapsto (4\cos t, 5 - 5\sin t, -3\cos t)$.

3 La courbe précédente est-elle plane ?

Exercice 8 (Courbes sur une surface)

Soit C la courbe tracée sur la surface d'équation $3z = xy + x^3$ et dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ est la courbe paramétrée C' définie par $x = t$, $y = t^2$ pour t parcourant $[0, 1]$.

1 Donner une expression intégrale pour la longueur de C' puis celle de C, puis les comparer.

2 Calculer la longueur de C' puis celle de C.

Exercice 9 (Construction des courbes de $\mathbb{R}^3$)

Énoncer pour les courbes de l'espace $\mathbb{R}^3$, le théorème analogue à la caractérisation des courbes planes à déplacements près par leur courbure.