

Dans toute cette feuille, \mathbb{R}^n sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n .

Exercice 1 (Hélice)

1 Soient r et h deux nombres réels strictement positifs. La courbe paramétrée suivante, appelée hélice, est-elle régulière ?

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

2 Les courbes paramétrées suivantes sont-elles régulières ?

$$d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad e :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Reparamétrage d'une courbe régulière)

1 Montrer que le reparamétrage d'une courbe régulière est encore régulier.

2 Peut-on reparamétriser toute courbe paramétrée par sa longueur d'arc ?

3 Déterminer un reparamétrage de la courbe $\left\{ \begin{array}{l} c : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array} \right.$ qui en change l'orientation.

Exercice 3 (Equivalence)

1 Les courbes paramétrées suivantes sont-elles équivalentes ?

$$c : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \quad d : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$

2 Les courbes paramétrées suivantes sont-elles équivalentes ?

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$

3 Deux courbes paramétrées équivalentes ont-elles même image ? La réciproque est-elle vraie ?

4 Peut-on retrouver une courbe à partir de son image ?

Exercice 4 (Calcul de longueur)

1 Calculer la longueur de la portion d'hélice

$$c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

2 Déterminer un paramétrage de cette portion d'hélice par sa longueur d'arc.

Exercice 5

(Différents paramétrages par longueur d'arc)

Montrer que deux paramétrages par longueur d'arc d'une même courbe régulière orientée diffèrent au plus par un changement de paramétrage de la forme $t \mapsto t_0 + t$.

Exercice 6

(Approximation par lignes polygonales)

Vérifier l'approximation polygonale pour un cercle de rayon r approché par des polygones réguliers à n côtés.

Exercice 7

(Les cycloïdes)

On considère un cercle \mathcal{C}_1 de rayon 1 qui glisse sur l'axe des x du plan euclidien orienté \mathbb{R}^2 , et pour tout nombre réel r strictement positif le cercle \mathcal{C}_r de rayon r , concentrique avec \mathcal{C}_1 et solidement attaché à \mathcal{C}_1 .

- 1 Déterminer par un paramétrage, la trajectoire T_r , appelée "cycloïde" du point M de coordonnées $(0, 1 - r)$ de \mathcal{C}_r lorsque \mathcal{C}_1 glisse sur l'axe des x .
- 2 Faire une ébauche de T_r suivant la position de r par rapport à 1.
- 3 T_r est-elle une courbe régulière ?
- 4 Calculer la longueur de T_r quand \mathcal{C}_1 fait un tour.

Exercice 8

(Approximation par lignes polygonales)

- 1 On rappelle qu'une ligne polygonale P de \mathbb{R}^n est la donnée d'un uplet $P = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ de points de \mathbb{R}^n . On supposera aussi que deux points consécutifs sont distincts. Rappeler la formule pour la longueur d'une ligne polygonale P .
- 2 On cherche à montrer le théorème suivant.

Théorème. Soit $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b)$ de $[a, b]$ de pas inférieure à δ ,

$$L[P] \leq L[c] \leq L[P] + \epsilon$$

où $P = (c(t_0), c(t_1), \dots, c(t_m))$ est la ligne polygonale simplement inscrite dans la courbe c associée à la partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b)$ de $[a, b]$.

- (1) Écrire en termes de quantificateurs, en partant d'un $\epsilon_1 > 0$, le théorème des sommes de Riemann pour la fonction $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \|\dot{c}(t)\|$.
 - (2) Écrire en termes de quantificateurs en partant d'un $\epsilon_2 > 0$ la propriété de continuité uniforme des fonctions composantes $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \dot{c}_j(t)$.
 - (3) Soit une partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b)$ de $[a, b]$. Écrire en termes de quantificateurs le théorème des accroissements finis pour la fonction $[t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \dot{c}_j(t)$ et l'intervalle $[t_{i+1} - t_i]$.
- 3 Majorer la quantité $||| c(t_{i+1}) - c(t_i) || - \|\dot{c}(t_{i+1})\| (t_{i+1} - t_i) ||$ par $\sqrt{n}\epsilon_2(t_{i+1} - t_i)$.
 - 4 Majorer la quantité $|L[c] - L[P]|$ par $\epsilon_1 + \sqrt{n}\epsilon_2(b - a)$.
 - 5 Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b)$ de $[a, b]$ de pas inférieure à δ ,

$$L[P] - \epsilon \leq L[c] \leq L[P] + \epsilon.$$

- 6 Conclure à l'aide de l'inégalité triangulaire sur les polygones.