UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie complexe

Variétés analytiques complexes, fibrés ectoriels holomorphes

Ces exercices sont tirés du livre “Complex geometry” de Daniel Huybrechts.

1. Fonctions holomorphes

Exercice 1 (Biholomorphismes)

1 Montrer que la transformation $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ envoie le demi-plan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$.
2 Montrer que toute application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{H}$ est constante.

Exercice 2 (Holomorphe / Harmonique)

Montrer que les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}^n$ sont harmoniques (pour la métrique euclidienne) i. e. vérifie

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} f = 0.$$

2. Formes différentielles

Exercice 3 (Image réciproque)

Soit V un ouvert de $\mathbb{C}^m$. Montrer que l'image réciproque d'une forme différentielle de type (p, q) sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ par une application holomorphe $f\ : V \to U$ est de type (p, q).

Exercice 4 (conjugaison)

Montrer que pour une forme différentielle u sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $\overline{\partial u} = \overline{\partial}\overline{u}$.

Exercice 5 (calcul)

Calculer $i\partial\overline{\partial} \log(1 + |z|^2)$ dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{C}^n$.

3. Variétés analytiques complexes

Exercice 6 (Espaces projectifs)

1 Montrer que l'espace projectif $P(V)$ des droites d'un espace vectoriel complexe V est une variété analytique complexe. On choisira une base $(e_0, e_1, \cdots, e_n)$ de V, les coordonnées homogènes $[Z_0 : Z_1 : \cdots : Z_n]$ associées et on décrira un atlas sur les ouverts $U_i := \{Z_i \neq 0\}$ et les changements de cartes.
2 Montrer que l'application suivante (appelée fibration de Hopf) $(z_1, z_2) \to (|z_1|^2 - |z_2|^2, z_1\overline{z}_2)$ de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ envoie la sphère S^3 de $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ sur la sphère S^2 de $\mathbb{R} \times \mathbb{C} = R^3$, passe au quotient par l'action de $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$ par homothétie sur $\mathbb{C}^2$, et réalise donc un difféomorphisme de $\mathbb{P}^1$ sur S^2.

Exercice 7 (Grassmaniennes)

Soit V un espace vectoriel complexe de dimmension n, muni d'une base $(e_i)_{i=1\cdots n}$.

1 Déterminer une carte de la grassmanienne $Grass_r(V)$ au voisinage du r-plan W_0 engendré par $(e_i)_{i=1\cdots r}$.

2 Montrer que l'application $Grass_r(V) \to P(\Lambda^r V)$, $W \mapsto \Lambda^r W$ est un plongement holomorphe de $Grass_r(V)$ dans l'espace projectif $P(\Lambda^r V)$ des droites de $\Lambda^r V$.

Exercice 8 (Courbes et surfaces de Hopf)

Soit r un nombre réel strictement positif.

1 On considère l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C} - \{0\}$ par $(n, z) \mapsto r^n z$. Montrer que la courbe complexe $\mathbb{C} - \{0\}/\mathbb{Z}$ est isomorphe à une courbe elliptique, quotient de $\mathbb{C}$ par un réseau que l'on déterminera.

2 Montrer que l'application $S^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2 - \{0\}$, $(z_1, z_2, t) \mapsto (e^t z_1, e^t z_2)$ est un difféomorphisme. En déduire que la surface $\mathbb{C}^2 - \{0\}/\mathbb{Z}$, quotient par l'action $(n, z) \mapsto r^n z$, appelée surface de Hopf, est difféomorphe à $S^3 \times S^1$.

3 Montrer que toute surface de Hopf contient des courbes elliptiques.

4. Fibrés vectoriels

Exercice 9 (Fibrés en droites sur $\mathbb{P}^n$)

1 Déterminer des trivialisations du fibré tautologique en droites $\mathcal{O}(-1)$ sur $P(V)$ sur les ouverts de cartes U_i associés à une base $(e_0, e_1, \cdots, e_n)$ de V, et les changements de trivialisation.

2 Déterminer les changements de trivialisation du fibré $\mathcal{O}(1)$ dual de $\mathcal{O}(-1)$ puis ceux des fibrés en droites $\mathcal{O}(k)$ puissances symétriques de $\mathcal{O}(1)$.

3 Montrer chaque polynôme homogènes de degré d en les coordonnées homogènes $[Z_0 : Z_1 : \cdots : Z_n]$ donne un section de l'un des fibrés $\mathcal{O}(k)$.

4 Réciproquement, soit t une section non nulle de $\mathcal{O}(d)$. Fixons une section s_0 de $\mathcal{O}(d)$ associée à un polynôme homogène P_0 de degré d en les $[Z_0 : Z_1 : \cdots : Z_n]$. Construire à l'aide de ces données une fonction rationnelle F sur $P(V)$, puis une $\tilde{F}$ sur $V - \{0\}$ telles que $G = \tilde{F} P_0$ soit holomorphe sur $V - \{0\}$ et homogène de degré d. Montrer que G est un polynôme de degré d et que la section de $\mathcal{O}(d)$ associées est t.

5 En déduire un isomorphisme d'anneaux de $\oplus_{d=0}^{+\infty} H^0(P(V), \mathcal{O}(d)) \equiv \mathbb{C}[Z_0 : Z_1 : \cdots : Z_n] = \mathbb{C}[V^\star]$.

6 Montrer qu'il y a un biholomorphisme de l'espace total $\mathcal{O}(-1)$ privé de la section nulle sur V privé de l'origine.

7 Montrer qu'il y a un biholomorphisme de l'espace total $\mathcal{O}(-1)$ avec l'éclatement de V en 0.

Exercice 10 (Fibré normal)

On rappelle qu'à l'aide du théorème d'inversion locale, une sous-variété Y de dimension m d'une variété analytique complexe X de dimension n peut être présentée dans un atlas $(U_\alpha, \phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{C}^n)$ de X par $\phi_\alpha(Y \cap U_\alpha) = \{z \in V_\alpha, z_{m+1} = \cdots = z_n = 0\}$. Ainsi, les changements de cartes $\phi_{\alpha\beta}$ envoient $\mathbb{C}^m$ sur lui même.

1 Rappeler les changements de trivialisation du fibré tangent TX de X.

2 Montrer que le fibré tangent TY à Y est un sous-fibré de $TX_{|Y}$.

3 Déterminer les changements de cartes du fibré quotient, appelé fibré normal $N_{Y/X}$ à Y dans X.

4 Déterminer un repère local du fibré normal $N_{Y/X}$.

5 Déterminer une application de l'idéal $\mathcal{I}_Y$ sur le fibré conormal $N^\star_{Y/X}$ et en déduire l'isomorphisme $N^\star_{Y/X} \equiv \mathcal{I}_Y / \mathcal{I}_Y^2$

6 Montrer que le fibré canonique K_Y de Y est isomorphe à $K_{X|Y} \otimes \det N_{Y/X}$.