UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Examen (Seconde session)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie... Durée : 2 heures

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (2 points)

Démontrer les formules de Frenet pour les courbes paramétrées par la longueur d'arc dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (4 points)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc. On suppose que c reste dans le disque de rayon $r > 0$ et qu'au point de paramètre τ, $\| c(\tau) \| = r$.

1 Rappeler la valeur absolue de la courbure d'un cercle de rayon r.

2 Montrer en dérivant une fois la fonction $\phi : t \mapsto \| c(t) \|^2$ que $\ddot{c}(\tau)$ est colinéaire à $c(\tau)$.

3 Montrer en dérivant à nouveau la fonction ϕ que la courbure en τ vérifie $|\kappa(\tau)| \geq 1/r$.

4 Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 3 (4 points)

1 Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $F : (u, v) \mapsto (u + v^2, u^2 - v^2, v)$ au point $M(u_0, v_0)$ de paramètres (u_0, v_0).

2 Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^5 + y^5 + z^5 = 1$ au point $M(x_0, y_0, z_0)$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0).

3 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent au graphe de f en chacun de ses points.

Exercice 4 (4 points)

1 Déterminer les plans tangents et un champs de vecteurs normaux unitaires au paraboloïde hyperbolique $\mathcal{P}$ d'équation $z = y^2 - x^2$ au voisinage du point $A(0, 0, 0)$ de coordonnées $(0, 0, 0)$.

2 Déterminer l'application de Weingarten au point A du paraboloïde hyperbolique $\mathcal{P}$.

3 En déduire la courbure de Gauss et les directions principales du paraboloïde hyperbolique $\mathcal{P}$ au point A.

Exercice 5 (4 points)

On considère la sphère de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$. La projection stéréographique de centre le pôle Nord sur le plan de hauteur nulle (d'équation $z = 0$) conserve-t-elle les longueurs ? les angles ? les aires ?

Exercice 6 (4 points)

L'intersection de deux surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$ est-elle une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$?