UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

EXAMEN (SECONDE SESSION / CORRIGÉ)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie... Durée : 2 heures

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (2 points)

Démontrer les formules de Frenet pour les courbes paramétrées par la longueur d'arc dans $\mathbb{R}^3$.

Réponse. *C'est une question de cours.*

Exercice 2 (4 points)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc. On suppose que c reste dans le disque de rayon $r > 0$ et qu'au point de paramètre τ, $\| c(\tau) \| = r$.

1 Rappeler la valeur absolue de la courbure d'un cercle de rayon r.

Réponse. *La courbure d'un cercle de rayon r est en valeur absolue $1/r$.*

2 Montrer en dérivant une fois la fonction $\phi : t \mapsto \| c(t) \|^2$ que $\ddot{c}(\tau)$ est colinéaire à $c(\tau)$.

Réponse. *Puisque la fonction norme (au carré) ϕ est différentiablement continue et maximale au point de paramètre τ, sa dérivée en τ s'annule. On trouve $\phi'(\tau) = 2 < c(\tau), \dot{c}(\tau) >= 0$. Par ailleurs, comme la fonction c donne un paramétrage par la longueur d'arc, la fonction $t \mapsto \| \dot{c}(t) \|^2$ est constante égale à 1, donc aussi de dérivée nulle en τ. On trouve $2 < \ddot{c}(\tau), \dot{c}(\tau) >= 0$. Par conséquent, en notant $\vec{n}$ un vecteur normal unitaire à $\dot{c}(\tau)$, on trouve $c(\tau) = +/- \vec{n}$ et $\ddot{c}(\tau) = \kappa(\tau)\vec{n}$.*

3 Montrer en dérivant à nouveau la fonction ϕ que la courbure en τ vérifie $|\kappa(\tau)| \geq 1/r$.

Réponse. *Puisque la fonction norme ϕ est deux fois différentiablement continue et maximale au point de paramètre τ, sa dérivée seconde en τ est négative. On trouve $\phi''(\tau) = 2 < c(\tau), \ddot{c}(\tau) > +2 < \dot{c}(\tau), \dot{c}(\tau) >= +/- 2r\kappa(\tau) + 2 \leq 0$. Donc, $-/+ 2r\kappa(\tau) \geq 2$ et par suite $-/+ r\kappa(\tau)$ est positif de valeur absolue au moins 1. En divisant par $r > 0$, on trouve le résultat.*

4 Interpréter graphiquement ce résultat.

Réponse. *La courbe est en ses points extrémaux plus courbée que le cercle de rayon r qui la borde.*

Exercice 3 (4 points)

1 Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $F : (u, v) \mapsto (u + v^2, u^2 - v^2, v)$ au point $M(u_0, v_0)$ de paramètres (u_0, v_0).

Réponse. *Le plan $T_M\mathcal{S}$ tangent à $\mathcal{S}$ au point M est engendré par les deux vecteurs*

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2u_0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} 2v_0 \\ -2v_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une équation cartésienne du plan $T_M\mathcal{S}$ est obtenue par

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in T_M\mathcal{S} \iff \begin{vmatrix} 1 & 2v_0 & X \\ 2u_0 & -2v_0 & Y \\ 0 & 1 & Z \end{vmatrix} = 0 \iff -2u_0X + Y + 2(1+2u_0)v_0Z = 0.$$

2 Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^5 + y^5 + z^5 = 1$ au point $M(x_0, y_0, z_0)$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0).

Réponse. *Il suffit de dire que le plan tangent $T_M\Sigma$ est le noyau de la différentielle de la fonction $\psi : (x, y, z) \mapsto x^5 + y^5 + z^5 - 1$ en (x_0, y_0, z_0). On trouve*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in T_M\Sigma \iff 5(x_0^4X + y_0^4Y + z_0^4Z) = 0 \iff x_0^4X + y_0^4Y + z_0^4Z = 0.$$

3 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\ : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent au graphe de f en chacun de ses points.

Réponse. *Une équation du graphe $\mathcal{G}$ de f est $z = f(x, y)$. Une équation du plan tangent en M de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ est donc*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in T_M\Sigma \iff Z = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)X + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)Y$$

.

Exercice 4 (4 points)

1 Déterminer les plans tangents et un champs de vecteurs normaux unitaires au paraboloïde hyperbolique $\mathcal{P}$ d'équation $z = y^2 - x^2$ au voisinage du point $A(0, 0, 0)$ de coordonnées $(0, 0, 0)$.

Réponse. *Par la question précédente, $\mathcal{P}$ a pour plan tangent au point $M(x, y, z)$ le plan d'équation $Z = 2yY - 2xX$. En particulier, le plan tangent en A est le plan d'équation $Z = 0$ engendré par les deux vecteurs de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Un champs de vecteurs normaux unitaires est donc*

$$N(x, y, y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2 Déterminer l'application de Weingarten au point A du paraboloïde hyperbolique $\mathcal{P}$.

Réponse. *L'endomorphisme de Weingarten est donné au point $A(0, 0, 0)$ par $W_A = -dN(A) : T_A\mathcal{P} \to T_A\mathcal{P}$*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 En déduire la courbure de Gauss et les directions principales du paraboloïde hyperbolique $\mathcal{P}$ au point A.

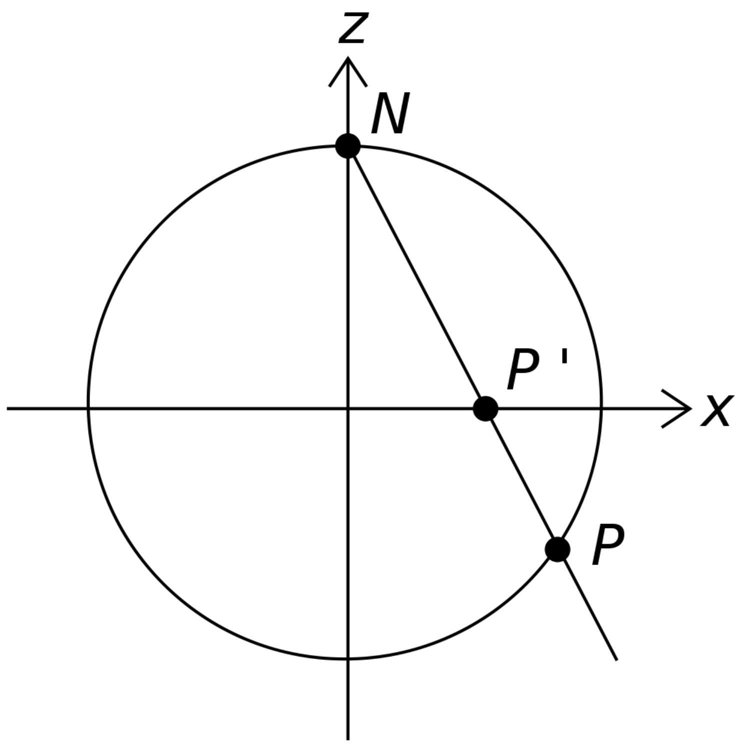
Réponse. *Ses valeurs propres sont donc -2 et 2. La courbure de Gauss de $\mathcal{P}$ en A est donc -4. Les directions propres sont donc les axes de coordonnées x et y.*

Exercice 5 (4 points)

On considère la sphère de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^3$. La projection stéréographique de centre le pôle Nord sur le plan de hauteur nulle (d'équation $z = 0$) conserve-t-elle les longueurs ? les angles ? les aires ?

Réponse. *On trouve en utilisant la relation $\vec{NP'} \parallel \vec{NP}$ que la projection stéréographique depuis le pôle nord sur le plan équatoriale est donnée par*

$$\begin{array}{rcl} p : S^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{x}{1-z} \\ \frac{y}{1-z} \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



et la réciproque

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \to & S^2 \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{2x'}{(x')^2+(y')^2+1} \\ \frac{2y'}{(x')^2+(y')^2+1} \\ 1 - \frac{2}{(x')^2+(y')^2+1} \end{pmatrix} \end{array}$$

En particulier, la différentielle du paramétrage F au point de paramètres $(0,0)$ est

$$\begin{array}{rccc} dF(0,0): & T_{(0,0)}\mathbb{R}^2 & \to & S^2_S \\ & \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2X' \\ 2Y' \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

n'est ni une isométrie, ni de déterminant $+/-1$. La projection stéréographique ne conserve donc ni les longueurs, ni les aires. Par contre, la différentielle du paramétrage F au point de paramètres (x',y') est

$$\begin{array}{rccc} dF(x',y'): & T_{(x',y')}\mathbb{R}^2 & \to & TS^2 \\ & \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2\frac{-(x')^2+(y')^2+1}{((x')^2+(y')^2+1)^2}X' - 4\frac{x'y'}{((x')^2+(y')^2+1)^2}Y' \\ -4\frac{x'y'}{((x')^2+(y')^2+1)^2}X' + 2\frac{(x')^2-(y')^2+1}{((x')^2+(y')^2+1)^2}Y' \\ 4\frac{x'}{((x')^2+(y')^2+1)^2}X' + 4\frac{y'}{((x')^2+(y')^2+1)^2}Y' \end{pmatrix} \end{array}$$

On vérifie alors que

$$\| \, dF(x',y') \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \|^2 = \frac{4 \, \| \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \|^2}{(x')^2+(y')^2+1}.$$

Donc, $dF(x',y')$ conserve les angles.

Exercice 6 (4 points)

L'intersection de deux surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$ est-elle une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$?

Réponse. *Non, par exemple, les deux surfaces régulières (graphes) d'équation $(z=0)$ et $(z = x^2-y^3)$ s'intersectent sur la courbe d'équation $(z=0, x^2-y^3=0)$ qui est singulière en $(0,0,0)$.*