UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

PARTIEL 2

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie... Durée : 2 heures

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (10 points)

On considère, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, le cylindre $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ muni de la métrique riemannienne restriction du produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

1 Montrer que $\mathcal{C}$ est une surface régulière.

2 Montrer que l'application $F :]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(\theta, h) \mapsto (\cos\theta, \sin\theta, h)$ donne un paramétrage de $\mathcal{C}$ au voisinage du point p de coordonnées $(1, 0, 0)$.

3 Calculer la matrice $G(\theta, h)$ de la première forme fondamentale I dans la base

$$(X_\theta(\theta, h) := \frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta, h), X_h := \frac{\partial F}{\partial h}(\theta, h))$$

de $T_{F(\theta,h)}\mathcal{C}$ correspondant à ce paramétrage F.

4 Déterminer un vecteur normal unitaire $N(\theta, h)$ au point $F(\theta, h)$.

5 Calculer les symboles de Christoffel de la base $(X_\theta(\theta, h), X_h(\theta, h))$ de $T_{F(\theta,h)}\mathcal{C}$.

6 Soit a un nombre réel fixé et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, at)$ la courbe paramétrée tracée sur le cylindre $\mathcal{C}$. Exprimer le vecteur vitesse au point de paramètre t dans la base (X_θ, X_h) de $T_{F(\theta,h)}\mathcal{C}$) pour (θ, h) convenable.

7 Les courbes paramétrées précédentes sont-elles des géodésiques ?

8 La section plane du cylindre $\mathcal{C}$ par le plan d'équation $z = x$ paramétrée par la longueur d'arc est-elle une géodésique ?

Exercice 2 (4 points)

1 Montrer que l'image d'une géodésique par une isométrie entre deux surfaces (S, g) et $S', g')$ de $\mathbb{R}^3$ munies de métriques riemanniennes est une géodésique.

2 Retrouver les géodésiques du cylindre $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ de l'exercice précédent.

Exercice 3 (6 points)

Soit $\kappa \in \mathbb{R}^+$. On considère sur le plan affine $\mathbb{R}^2 = \{z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, la métrique riemannienne donnée dans la paramétrisation $Id : (u_1, u_2) \mapsto (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ par (on pourra noter (x, y) au lieu de (u^1, u^2))

$$(g_{ij}(x, y))_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}} = \frac{1}{(1 + \kappa(x^2 + y^2))^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1 Calculer les symboles de Christoffel, par la formule

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) g^{mk}.$$

2 On rappelle la formule des coefficients de l'endomorphisme de courbure

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_{l=1}^{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^l}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial u^j} + \sum_{m=1}^{2} \left(\Gamma_{mi}^l \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{mj}^l \Gamma_{ki}^m \right) \right) X_l$$

Calculer la courbure de Gauss de $(\mathbb{R}^2, g)$.