Master 1 — Mathématiques 2012–2013

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Partiel

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie... Durée : 2 heures

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (3 points)

1 Calculer la torsion de la courbe de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $t \mapsto (4\cos t, 5 - 5\sin t, -3\cos t)$.
2 La courbe précédente est-elle plane ?

Exercice 2 (3 points)

Soit C la courbe tracée sur la surface d'équation $3z = xy + x^3$ et dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ est la courbe paramétrée C' définie par $x = t$, $y = t^2$ pour t parcourant $[0, 1]$.
1 Donner une expression intégrale pour la longueur de C' puis celle de C, puis les comparer.
2 Calculer la longueur de C' puis celle de C.

Exercice 3 (3 points)

Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2(2z^2 + y^2) + x = 0$.
1 La surface S est-elle régulière ?
2 Paramétrer la surface S (de manière polynomiale) en prenant les paramètres u et v parmi les variables x, y et z.
3 Déterminer une base de l'espace tangent à la surface S en $A(-6, 1, -1)$.
4 Calculer un vecteur normal à la surface S en $A(-6, 1, -1)$.
5 Le vecteur $V = (27, -29, -1)$ appartient-il au plan tangent à S en $A(-6, 1, -1)$?

Exercice 4 (4 points)

Calculer l'aire de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$.

Exercice 5 (4 points)

Calculer une application de Weingarten du paraboloïde hyperbolique d'équation $z = x^2 - y^2$ au point $p(0, 0, 0)$. En déduire sa courbure de Gauss et ses directions principales.

Exercice 6 (4 points)

Soit C une courbe régulière plane fermée simple convexe paramétrée par la longueur d'arc par l'application $[0, \ell] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t)$. Un coin est un point de la courbe où la fonction courbure a une dérivée nulle. Le but de l'exercice est de montrer que la courbe C a au moins trois coins. On suppose que C n'est pas un cercle. On notera $v(t) = \dot{c}(t)$ et $\gamma(t) = \ddot{c}(t)$ et $\kappa(t)$ la courbure au point de paramètre t.
1 Montrer que C a au moins deux coins distincts P et Q. Faire une figure.
2 Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $\int_0^\ell \dot{\kappa}(t) c(t) = 0$.
3 On suppose que P et Q sont sur l'axe des x et qu'il n'y a pas d'autres coins. Aboutir à une contradiction.
4 (bonus) Montrer que la courbe C a au moins quatre coins.