UNIVERSITÉ DE RENNES 1

## Géométrie différentielle

Partiel (corrigé)

Durée : 2 heures

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension $n$. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

### Exercice 1 (points)

**1** *Calculer la torsion de la courbe de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $c : t \mapsto (4\cos t, 5 - 5\sin t, -3\cos t)$.*

Le vecteur vitesse est $\dot{c}(t) = (-4\sin t, -5\cos t, 3\sin t)$. Sa norme est 5. Par conséquent, le paramétrage par $C : t \mapsto (4\cos t/5, 5 - 5\sin t/5, -3\cos t/5)$ est un paramétrage par la longueur d'arc. Le nouveau vecteur vitesse est $\dot{C}(t) = (-4/5\sin t/5, -\cos t/5, 3/5\sin t/5)$. Le vecteur accélération est $\ddot{C}(t) = (-4/25\cos t/5, 1/5\sin t/5, 3/25\cos t/5)$. Sa norme $1/5$ est la courbure $\kappa$. Le vecteur normal unitaire est donc $n(t) = (-4/5\cos t/5, \sin t/5, 3/5\cos t/5)$. Le vecteur binormal est $\dot{C}(t) \times n(t) = (-3/5, 0, -4/5)$. Comme il est constant, la torsion est nulle par les formules de Frenet.

**2** *La courbe précédente est-elle plane ?*

Oui, puisque la torsion est nulle. On peut aussi remarquer que la courbe est dans le plan d'équation $3X + 4Z = 0$.

### Exercice 2 (points)

*Soit $C$ la courbe tracée sur la surface d'équation $3z = xy + x^3$ et dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ est la courbe paramétrée $C'$ définie par $x = t$, $y = t^2$ pour $t$ parcourant $[0, 1]$.*

**1** *Donner une expression intégrale pour la longueur de $C'$ puis celle de $C$, puis les comparer.*

Le vecteur vitesse de la courbe $C'$ est $(1, 2t, 0)$ de norme $\sqrt{1+4t^2}$. La longueur de la courbe $C'$ est donc $l[C'] = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}dt$. La courbe $C$ est paramétrée par $x = t$, $y = t^2$ $z = 2/3t^3$ pour $t$ parcourant $[0, 1]$. Le vecteur vitesse de la courbe $C$ est $(1, 2t, 2t^2)$ de norme $\sqrt{1+4t^2+4t^4} = 1 + 2t^2$. La longueur de la courbe $C$ est donc $l[C] = \int_0^1 1 + 2t^2 dt$. Comme pour tout $t \in [0, 1], 0 \le 1 + 4t^2 \le (1 + 2t^2)^2$, pour tout $t \in [0, 1]$, $\sqrt{1+4t^2} \le (1 + 2t^2)$ et par intégration $l[C'] \le l[C]$.

**2** *Calculer la longueur de $C'$ puis celle de $C$.*

En utilisant le changement de variables $2t = \sinh(u)$, on obtient le calcul de primitive

$$\begin{aligned} 4\int \sqrt{1+4t^2}dt &= 2\int \cosh^2 u du = \int (\cosh(2u) + 1)du = \sinh(2u)/2 + u = \sinh u \cosh u + u \\ &= 2t\sqrt{1+4t^2} + \ln(2t + \sqrt{1+4t^2}). \end{aligned}$$

Par conséquent, la longueur de $C'$ est $1/4[2t\sqrt{1+4t^2}+\ln(2t+\sqrt{1+4t^2})]_0^1 = 1/4(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5}))$. La longueur de $C$ est $1 + 2/3$.

### Exercice 3 (points)

*Soit $S$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2(2z^2 + y^2) + x = 0$.*

**1** *La surface $S$ est-elle régulière ?*

La surface $S$ est le graphe de la fonction $\mathcal{C}^\infty$ $f : (y, z) \mapsto -2(2z^2 + y^2)$. Elle est donc régulière.

**2** *Paramétrer la surface $S$ (de manière polynomiale) en prenant les paramètres $u$ et $v$ parmi les variables $x$, $y$ et $z$.*

La surface $S$ est paramétrée par $F(u, v) = (-2(u^2 + 2v^2), u, v)$.

**3** *Déterminer une base de l'espace tangent à la surface $S$ en $A(-6, 1, -1)$.*

Le point $A$ est obtenu au point de paramètre $(1,-1)$ On calcule $\frac{\partial F}{\partial u} = (-4u, 1, 0) = (-4, 1, 0)$ et $\frac{\partial F}{\partial v} = (-8v, 0, 1) = (8, 0, 1)$. Ces deux vecteurs forment une base de l'espace tangent à $S$ au point de paramètre $(u, v)$.

**4** *Calculer un vecteur normal à la surface $S$ en $A(-6, 1, -1)$.*

Comme $S$ est la ligne de niveau 0 de la fonction $\varphi(x, y, z) = 2(2z^2 + y^2) + x$ sur $\mathbb{R}^3$, on calcule $(grad\varphi)_A = (1, 4y, 8z) = (1, 4, -8) =: n$. Ce vecteur est bien orthogonal au plan tangent obtenu à la question **3**.

**5** *Le vecteur $V = (27, -29, -1)$ appartient-il au plan tangent à $S$ en $A(-6, 1, 1)$ ?*

Comme $< V, n >=< (27, -29, -1), (1, 4, -8) >= -81 \neq 0$, le vecteur $V$ n'est pas dans le plan tangent à $S$ en $A$.

## Exercice 4 (points)

*Calculer l'aire de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$.*

On paramètre $\mathcal{E}$ en coordonnées sphériques par $F(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, 1/\sqrt{5}\cos\varphi)$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varphi \in [0, \pi]$. Le plan tangent est engendré par les vecteurs $\frac{\partial F}{\partial \theta} = (-\sin\theta \sin\varphi, \cos\theta \sin\varphi, 0)$ et $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, -1/\sqrt{5}\sin\varphi)$. Dans cette base, la matrice de la première forme fondamentale est $\begin{pmatrix} \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi + 1/5\sin^2\varphi \end{pmatrix}$. L'élément de volume est $1/\sqrt{5}\sin\varphi\sqrt{1 + 4\cos^2\varphi}d\theta d\varphi$. L'aire de l'ellipsoïde est donc

$$\begin{aligned} A[\mathcal{E}] &= \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\varphi\sqrt{1 + 4\cos^2\varphi}d\varphi d\theta \\ &= 2\pi\int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\varphi\sqrt{1 + 4\cos^2\varphi}d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\int_{t=-1}^{1} \sqrt{1 + 4t^2}dt = \frac{\pi}{\sqrt{5}}(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})) \\ &= \pi(2 + \frac{\ln(2 + \sqrt{5})}{\sqrt{5}}). \end{aligned}$$

## Exercice 5 (Paraboloïde hyperbolique)

*Calculer une application de Weingarten du paraboloïde hyperbolique $S$ d'équation $z = x^2 - y^2$ au point $p(0, 0, 0)$. En déduire sa courbure de Gauss et ses directions principales.*

On paramètre la surface $S$ par $F(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$. L'espace tangent en $p$ est engendré par $(\frac{\partial F}{\partial u})_p = (1, 0, 2u)_p = (1, 0, 0)$ et $(\frac{\partial F}{\partial v})_p = (0, 1, -2v)_p = (0, 1, 0)$. La matrice de la première forme fondamentale dans cette base est en $p$ de paramètre $(0, 0)$ $\begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1 + 4v^2 \end{pmatrix} = Id$. La matrice de la seconde forme fondamentale se calcule à l'aide du vecteur normal $n = (\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v})_p = (0, 0, 1)$ par $\begin{pmatrix} < \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, n > & < \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}, n > \\ < \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}, n > & < \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}, n > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Comme la matrice de la première forme fondamentale est l'identité, cette dernière matrice est aussi celle de l'endomorphisme de Weingarten. La courbure de Gauss est donc le déterminant $-4$. Les deux directions principales sont dirigées par les vecteurs $\frac{\partial F}{\partial u}_p = (1, 0, 0)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}_p = (0, 1, 0)$.

## Exercice 6 (points)

*Soit $C$ une courbe régulière plane fermée simple convexe paramétrée par la longueur d'arc par l'application $[0, \ell] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t)$. Un coin est un point de la courbe où la fonction courbure a une dérivée nulle. Le but de l'exercice est de montrer que la courbe $C$ a au moins trois coins. On* *suppose que $C$ n'est pas un cercle. On notera $v(t) = \dot{c}(t)$ et $\gamma(t) = \ddot{c}(t)$ et $\kappa(t)$ la courbure au point de paramètre $t$.*

**1** *Montrer que $C$ a au moins deux coins distincts $P$ et $Q$. Faire une figure.*

La fonction courbure est continue et non constante sur le compact $[0, \ell]$. Elle atteint donc son maximum et son minimum en deux points distincts $P$ et $Q$. Comme elle est continûment dérivable, en ces points sa dérivée est nulle. Ce sont donc des coins.

**2** *Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $\int_0^\ell \dot{\kappa}(t)c(t) = 0$.*

On utilise la formule de Frenet $\dot{n}(t) = -\kappa(t)\dot{c}(t)$.

$$\int_0^\ell \dot{\kappa}c(t) \quad = - \quad \int_0^\ell \kappa\dot{c}(t) = \int_0^\ell \dot{n}(t) = n(\ell) - n(0) = 0.$$

**3** *On suppose que $P$ et $Q$ sont sur l'axe des $x$ et qu'il n'y a pas d'autres coins. Aboutir à une contradiction.*

Par hypothèse, l'ordonnée de $\dot{\kappa}(t)c(t)$ serait de signe constant sur les deux parties de la courbe délimitées par $P$ et $Q$. Ceci contredit l'annulation de l'intégrale.

**4** *(bonus) Montrer que la courbe $C$ a au moins quatre coins.*

S'il n'y a que trois coins, la courbe est partagée en trois parties. Sur deux des parties adjacentes $\dot{\kappa}$ a le même signe. Le raisonnement précédent en déplaçant la courbe, de sorte que $\dot{\kappa}$ soit de signe constant sur chaque demi-plan $(y \geq 0)$ et $(y \leq 0)$ aboutit à une contradiction.