UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Examen

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie... Durée : 2 heures

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (2 points)

On considère la courbe plane $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

1 Est-ce une courbe régulière ?

2 L'application $t \mapsto (t^2, t^4)$ est-elle un paramétrage régulier au voisinage du point de coordonnées $(0, 0)$?

3 L'application $t \mapsto (t^2, t^4)$ est-elle un paramétrage régulier au voisinage du point de coordonnées $(1, 1)$?

Exercice 2 (4 points)

1 On considère, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, une courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par la longueur d'arc $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto c(t)$. Rappeler la définition de la courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $c(t)$.

2 On considère, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, une courbe $\mathcal{C}$ paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $s \mapsto \gamma(s)$. Donner une expression de la courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $\gamma(s)$ simplement à l'aide de γ et de ses dérivées.

3 On considère, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, une courbe $\mathcal{C}$ paramétrée régulière $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $s \mapsto \gamma(s)$. Donner une expression de la courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $\gamma(s)$ simplement à l'aide de γ et de ses dérivées.

Exercice 3 (4 points)

Soit κ et τ deux nombres réels strictement positifs fixés.

1 Existe-t-il une courbe régulière de l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté à courbure constante égale à κ et à torsion constante égale à τ. (Justifier en donnant l'argument principal, sans vraiment rédiger de démonstration).

2 En supposant l'existence d'une telle courbe, comment les autres courbes régulières à courbure constante égale à κ et à torsion constante égale à τ s'en déduisent-elle ? (Justifier en donnant l'argument principal, sans vraiment rédiger de démonstration).

3 Donner si possible l'allure d'une courbe régulière de l'espace $\mathbb{R}^3$ à courbure constante égale à κ et à torsion constante égale à τ.

Exercice 4 (6 points)

On considère l'application f de la sphère unité $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans le cylindre $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2+y^2=1$ donnée en coordonnées cartésiennes par

$$f\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z \end{pmatrix}.$$

1 Faire une figure pour décrire géométriquement cette application.

2 On considère un paramétrage local de la sphère unité $\mathcal{S}$ en coordonnées polaires

$$F : (\theta,\phi) \in]0,2\pi[\times]0,\pi[\quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Déterminer la première forme fondamentale de la sphère dans cette paramétrisation.

3 On considère l'application $G = f \circ F$. Montrer que c'est un paramétrage local du cylindre $\mathcal{C}$ et calculer la première forme fondamentale du cylindre dans cette paramétrisation.

4 L'application f est-elle un difféomorphisme local ? un difféomorphisme de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{C}$?

5 L'application f est-elle une isométrie locale ? conserve-t-elle les aires ?

6 En déduire l'aire de la portion de sphère entre deux grands cercles passant par les poles nord et sud et faisant entre eux un angle de mesure α. Vérifier en déterminant l'aire de la sphère.

Exercice 5 (2 points)

On considère sur une surface régulière S munie d'une métrique riemannienne g une géodésique C paramétrée par $t \mapsto c(t)$. Montrer que la courbe paramétrée $s \mapsto \gamma(s) = c(\phi(s))$ obtenue par reparamétrisation de C par un difféomorphisme ϕ vérifie en tout point de C,

$$\nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s) \parallel \gamma'(s)$$

Exercice 6 (2 points)

On rappelle qu'une variété différentiable $(M,\mathcal{A})$ est un espace topologique muni d'un atlas différentiable maximal $\mathcal{A} := \{F_\alpha : U_\alpha \to W_\alpha\}$ tel que

(1) $M = \bigcup W_\alpha$

(2) les changements de paramétrage $F_\beta^{-1} \circ F_\alpha : F_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \to F_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$

Rappeler la définition d'un vecteur tangent à M en un point p.