UNIVERSITÉ DE RENNES 1

# Géométrie différentielle

## Examen

*Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie...* Durée : 2 heures

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension $n$. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

### Exercice 1 (2 points)

On considère la courbe plane $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

**1** Est-ce une courbe régulière ?

**Réponse.** *La courbe plane $\mathcal{P}$ est le graphe de la fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. C'est une parabole.*

**2** L'application $t \mapsto (t^2, t^4)$ est-elle un paramétrage régulier au voisinage du point de coordonnées $(0, 0)$ ?

**Réponse.** *Non, elle n'est surjective sur aucun voisinage du point de coordonnées $(0, 0)$, car elle n'atteint pas les points d'abscisse strictement négative.*

**3** L'application $t \mapsto (t^2, t^4)$ est-elle un paramétrage régulier au voisinage du point de coordonnées $(1, 1)$ ?

**Réponse.** *Oui, l'intervalle $]0, 2[$ est envoyé bijectivement par l'application $t \mapsto (t^2, t^4)$ sur le voisinage $\mathcal{P} \cap \{0 < x < 4\}$ du point de coordonnées $(1, 1)$. La bijection réciproque $\mathcal{P} \cap \{0 < x < 4\} \to ]0, 2[, (x, y) \mapsto \sqrt{x}$ est continue. Par ailleurs, la différentielle de l'application $t \mapsto (t^2, t^4)$ est partout sur l'intervalle $]0, 2[$ de rang $1$. Elle réalise donc un paramétrage régulier de $\mathcal{P}$ au voisinage du point de coordonnées $(1, 1)$*

### Exercice 2 (4 points)

**1** On considère, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, une courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par la longueur d'arc $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto c(t)$. Rappeler la définition de la courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $c(t)$.

**Réponse.** *À partir d'un paramétrage par la longueur d'arc, on définit la courbure d'une courbe régulière $\mathcal{C}$ au point $c(t)$ comme la norme $\kappa(c(t)) :=\| \ddot{c}(t) \|$ du vecteur accélération $\ddot{c}(t)$.*

**2** On considère, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, une courbe $\mathcal{C}$ paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $s \mapsto \gamma(s)$. Donner une expression de la courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $\gamma(s)$ simplement à l'aide de $\gamma$ et de ses dérivées.

**Réponse.** *On considère le reparamétrage de la courbe régulière $\mathcal{C}$ par la longueur d'arc $t \mapsto c(t) := \gamma(t/v)$ où $v :=\| \dot{\gamma}(s) \|$ est la norme constante des vecteurs vitesse de $\gamma$. La fonction $c$ est alors un paramétrage par la longueur d'arc. On calcule*

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= \frac{d}{ds}\left(c(sv)\right) = v\dot{c}(sv) \\ \gamma''(s) &= \frac{d}{ds}\left(v\dot{c}(sv)\right) = v^2\ddot{c}(sv).\end{aligned}$$

*Donc,* $\kappa(\gamma(s)) =\| \ddot{c}(sv) \|= v^{-2} \| \gamma''(s) \|= \frac{\|\gamma''(s)\|}{\|\dot{\gamma}(s)\|^2}$.

**3** On considère, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, une courbe $\mathcal{C}$ paramétrée régulière $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $s \mapsto \gamma(s)$. Donner une expression de la courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $\gamma(s)$ simplement à l'aide de $\gamma$ et de ses dérivées.

**Réponse.** *On considère le reparamétrage de la courbe régulière* $\mathcal{C}$ *par la longueur d'arc* $t \mapsto c(t) := \gamma(\phi^{-1}(t))$ *où* $\phi'(s) :=\| \gamma'(s) \|$ *est la norme du vecteur vitesse* $\gamma'(s)$*. La fonction* $c$ *est alors un paramétrage par la longueur d'arc. On calcule*

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \frac{d}{ds}\left(c(\phi(s))\right) = \phi'(s)\dot{c}(\phi(s)) \\ \gamma''(s) &= \frac{d}{ds}\left(\phi'(s)\dot{c}(\phi(s))\right) = (\phi'(s))^2\ddot{c}(\phi(s)) + \phi''(s)\dot{c}(\phi(s)) \\ \gamma''(s)\wedge\gamma'(s) &= (\phi'(s))^3\ddot{c}(\phi(s))\wedge\dot{c}(\phi(s)) \end{aligned}$$

*Donc, puisque* $\ddot{c}(\phi(s))$ *et* $\dot{c}(\phi(s))$ *sont orthogonaux et* $\dot{c}(\phi(s))$ *unitaire,*

$$\kappa(\gamma(s)) =\| \ddot{c}(\phi(s))\wedge\dot{c}(\phi(s)) \|= \frac{\| \gamma''(s)\wedge\gamma'(s) \|}{\| \gamma'(s) \|^3}$$

## Exercice 3 (4 points)

Soit $\kappa$ et $\tau$ deux nombres réels strictement positifs fixés.

**1** Existe-t-il une courbe régulière de l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté à courbure constante égale à $\kappa$ et à torsion constante $\tau$. (Justifier en donnant l'argument principal, sans vraiment rédiger de démonstration).

**Réponse.** *Par le théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence de solution pour les systèmes différentiel linéaire du premier ordre (ici à coefficients constants) appliqué aux formules de Frenet, on peut obtenir un paramétrage local d'une telle courbe régulière.*

**2** En supposant l'existence d'une telle courbe, comment les autres courbes régulières à courbure constante égale à $\kappa$ et à torsion constante $\tau$ s'en déduisent-elle ? (Justifier en donnant l'argument principal, sans vraiment rédiger de démonstration).

**Réponse.** *En appliquant la partie unicité du théorème précédent, les conditions initiales déterminent la courbe. Les courbes se déduisent donc l'une de l'autre par déplacements de l'espace euclidien.*

**3** Donner si possible l'allure d'une courbe régulière de l'espace $\mathbb{R}^3$ à courbure constante égale à $\kappa$ et à torsion constante $\tau$.

**Réponse.** *Il s'agit d'hélice avec paramétrage de la forme* $\gamma \ : s \mapsto \begin{pmatrix} a\cos s \\ a\sin s \\ bs \end{pmatrix}$*. On vérifie* $\gamma'(s) = \begin{pmatrix} -a\sin s \\ a\cos s \\ b \end{pmatrix}$ *de norme constante* $\| \gamma'(s) \|= \sqrt{a^2+b^2}$ *et* $\gamma''(s) = \begin{pmatrix} -a\cos s \\ -a\sin s \\ 0 \end{pmatrix}$*. Ainsi* $\kappa(\gamma(s)) = \frac{\|\gamma''(s)\|}{\|\dot{\gamma}(s)\|^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$ *est constante.*

*On obtient un paramétrage par la longueur d'arc avec* $t \mapsto c(t) = \gamma(t/v)$ *où* $v = \sqrt{a^2+b^2}$.

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \frac{1}{v}\begin{pmatrix} -a\sin(t/v) \\ a\cos(t/v) \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et } \ddot{c}(t) = \frac{1}{v^2}\begin{pmatrix} -a\cos(t/v) \\ -a\sin(t/v) \\ 0 \end{pmatrix} \\ n(t) &= \frac{\ddot{c}(t)}{\kappa(c(t))} = \begin{pmatrix} -\cos(t/v) \\ -\sin(t/v) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } \dot{n}(t) = \frac{1}{v}\begin{pmatrix} \sin(t/v) \\ -\cos(t/v) \\ 0 \end{pmatrix} \\ b(t) &= \dot{c}(t)\wedge n(t) = \frac{1}{v}\begin{pmatrix} \sin(t/v) \\ -\cos(t/v) \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*Donc,* $\tau(c(t)) =< \dot{n}(t), b(t) >= \frac{1}{a^2+b^2}$ *est constante.*

**Exercice 4** (6 points)

On considère l'application $f$ de la sphère unité $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans le cylindre $\mathcal{C}$ d'équation $x^2+y^2=1$ donnée en coordonnées cartésiennes par

$$f \ : (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z \end{pmatrix}.$$

**1** Faire une figure pour décrire géométriquement cette application.

**Réponse.**

**2** On considère un paramétrage local de la sphère unité $\mathcal{S}$ en coordonnées polaires

$$F : (\theta,\phi) \in ]0,2\pi[\times]0,\pi[ \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

Déterminer la première forme fondamentale de la sphère dans cette paramétrisation.

**Réponse.** *On trouve*

$$X_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } X_\phi = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ -\sin\phi \end{pmatrix} \text{ donc } G_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**3** On considère l'application $G = f\circ F$. Montrer que c'est un paramétrage local du cylindre et calculer la première forme fondamentale du cylindre dans cette paramétrisation.

**Réponse.** *Puisque* $\sin\phi > 0$,

$$G : (\theta,\phi) \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

*On calcule*

$$Y_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Y_\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin\phi \end{pmatrix} \text{ donc } G_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\phi \end{pmatrix}$$

*Comme $Y_\theta$ et $Y_\phi$ sont toujours linéairement indépendant, $G$ est $\mathcal{C}^\infty$ partout de rang 2. Par le théorème d'inversion local c'est un paramétrage local du cylindre $\mathcal{C}$.*

**4** L'application $f$ est-elle un difféomorphisme local ? un difféomorphisme de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{C}$ ?

**Réponse.** *L'application $f$ est différentiable sur $\mathcal{S}$ car sur la carte $F$, $f\circ F : (\theta,\phi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \cos\phi \end{pmatrix}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]0,2\pi[\times]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}^3$. Par la formule de différentielle d'une composée, comme $dG$ est partout de rang 2, on déduit que $df$ est partout de rang 2. C'est donc un difféomorphisme local entre deux surfaces de $\mathbb{R}^3$ (ou entre deux variétés différentiables). Comme elle n'est pas surjective sur le cylindre, ce n'est pas un difféomorphisme de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{C}$.*

**5** L'application $f$ est-elle une isométrie locale ? conserve-t-elle les aires ?

**Réponse.** *Comme $f$ ne conserve pas les premières formes fondamentales, ce n'est pas une isométrie locale. Par contre, elle conserve le déterminant des premières formes fondamentales et donc les aires.*

**6** En déduire l'aire de la portion de sphère entre deux grands cercles passant par les poles nors et sud et faisant entre eux un angle de mesure $\alpha$. Vérifier en déterminant l'aire de la sphère.

**Réponse.** *Cette portion de sphère est envoyée sur une partie de cylindre, qui dépliée par l'isométrie sur le plan donne un rectangle de côté $2 \times \alpha$. L'aire de la lune sur la sphère est donc $2\alpha$. Ceci est conforme à l'aire $4\pi$ de la sphère complète. (Noter que la partie non paramétrée est de mesure nulle).*

## Exercice 5 (2 points)

On considère sur une surface régulière $S$ munie d'une métrique riemannienne $g$ une géodésique $C$ paramétrée par $t \mapsto c(t)$. Montrer que la courbe paramétrée $s \mapsto \gamma(s) = c(\phi(s))$ obtenue par reparamétrisation de $C$ par un difféomorphisme $\phi$ vérifie en tout point de $C$,

$$\nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s) \parallel \gamma'(s)$$

**Réponse.** *On calculer*

$$\begin{aligned}
\nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s) &= \nabla_{\gamma'(s)}\phi'(s)\dot{c}(\phi(s)) \\
&= \phi''(s)\dot{c}(\phi(s)) + \phi'(s)\nabla_{\gamma'(s)}\dot{c}(\phi(s)) \\
&= \phi''(s)\dot{c}(\phi(s)) + (\phi'(s))^2\nabla_{\dot{c}(\phi(s))}\dot{c}(\phi(s)) \\
&= \phi''(s)\dot{c}(\phi(s))
\end{aligned}$$

*qui est bien parallèle à $\gamma'(s) = \phi'(s)\dot{c}(\phi(s))$.*

## Exercice 6 (2 points)

On rappelle qu'une variété différentiable $(M, \mathcal{A})$ est un espace topologique muni d'un atlas différentiable maximal $\mathcal{A} := \{F_\alpha : U_\alpha \to W_\alpha\}$ tel que

(1) $M = \bigcup W_\alpha$

(2) les changements de paramétrage $F_\beta^{-1} \circ F_\alpha : F_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \to F_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$

Rappeler la définition d'un vecteur tangent à $M$ en un point $p$.

**Réponse.** *Question de cours.*