UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Feuille de TD n°5, Étude intrinsèque des surfaces

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (Calculs sur un ellipsoïde)

Dans tout cet exercice, on considère un ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + y^2 + 5z^2 = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

1 Paramétrer $\mathcal{E}$ en coordonnées sphériques au voisinage du point $p(1, 0, 0)$. On notera F ce paramétrage.

2 Déterminer un champs de vecteurs normaux unitaires $N(u)$ au point $F(u)$.

3 Calculer la matrice $G(u)$ de la première forme fondamentale I dans la base $X_i(u) := \frac{\partial F}{\partial u_i}$ de $T_{F(u)}\mathcal{E}$ correspondant à ce paramétrage F. Calculer $G^{-1}(u)$.

4 Calculer l'endomorphisme de Weingarten à l'aide de la définition et du champs de vecteurs normaux N.

5 Calculer l'endomorphisme de Weingarten à l'aide des dérivées secondes du paramétrage F et du champs de vecteurs normaux N.

6 Calculer la courbure de Gauss.

7 Calculer la matrice $H(u)$ de la seconde forme fondamentale $I\!I$ dans la base $X_i(u)$.

8 Calculer les symboles de Christoffel de la base $X_i(u)$ à l'aide des dérivées secondes du paramétrage F.

9 Calculer les symboles de Christoffel de la base $X_i(u)$ à l'aide de la matrice $G(u)$ par la formule

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} \right) g^{mk}.$$

10 Calculer $\nabla^2_{X_i X_j} X_k$ en p à l'aide de la définition des dérivées secondes covariantes.

11 Calculer les valeurs $R(X_i, X_j)X_k$ de l'endomorphisme de courbure en p à l'aide de la définition.

12 Déterminer les valeurs $R(X_i, X_j)X_k$ de l'endomorphisme de courbure en p à l'aide de l'équation de Gauss

$$R(X_i, X_j)X_k = I\!I(X_j, X_k)W(X_i) - I\!I(X_i, X_k)X_j.$$

13 Retrouver la courbure de Gauss en p à l'aide de la formule $K(p) = I(R_p(V, W)W, V)$ du théorème Egreguim où (V, W) est une base orthonormée de $T_p\mathcal{E}$.

14 Calculer les valeurs $R(X_i, X_j)X_k$ de l'endomorphisme de courbure en p à l'aide de la formule

$$R(X_i, X_j)X_k = K(p)[I(X_j, X_k)X_i - I(X_i, X_k)X_j].$$

Exercice 2 (Métrique riemannienne)

Soit $\kappa \in \mathbb{R}$. On considère sur le plan affine $\mathbb{R}^2$, la métrique riemannienne donnée par

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{(1 + \kappa(x^2 + y^2))^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les symboles de Christoffel, les coefficients de l'endomorphisme de courbure par la formule

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial u^j} + \sum_m \left(\Gamma^l_{mi}\Gamma^m_{kj} - \Gamma^l_{mj}\Gamma^m_{ki} \right) \right) X_l$$

et la courbure de Gauss de $(\mathbb{R}^2, g)$.