UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Feuille de TD n°4, Étude intrinsèque des surfaces

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 1 (Dérivées covariantes)

1 Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P} = (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \{0\} &\to \mathcal{C} = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 / Z > 0, X^2 + Y^2 = 1/3Z^2\} \\ (x, y, 0) &\mapsto \frac{1}{2\sqrt{X^2 + Y^2}}(X^2 - Y^2, 2XY, \sqrt{3}(X^2 + Y^2)) \end{aligned}$$

est une isométrie locale.

2 On considère dans le plan $\mathcal{P}$ la courbe paramétrée par $c : t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$. Déterminer son image d dans le cône $\mathcal{C}$. Déterminer l'image $v(t)$ du champs de vecteurs constant $(1, 0, 0)$ par la différentielle de f au point $c(t)$. Calculer $c(2\pi) - c(0)$. Calculer la dérivée covariante $\frac{\nabla}{dt}v(t)$ du champs de vecteur $v(t)$ sur le cône $\mathcal{C}$ le long de la courbe d.

Exercice 2 (Isométries locales)

1 Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : P = \mathbb{R}^2 \times \{0\} &\to C = S^1 \times \mathbb{R} \\ (t, y, 0) &\mapsto (\cos t, \sin t, y) \end{aligned}$$

est une isométrie locale.

2 Les courbures principales des surfaces régulières sont-elles des quantités intrinsèques ? La courbure moyenne des surfaces régulières est elle une quantité intrinsèque ?

3 Déterminer un champs de vecteurs non nul à dérivée covariante nulle le long de la courbe du cylindre C d'équation $Z = 0$.

Exercice 3 (Dérivées covariantes)

1 Soit $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. On considère sur la sphère unité la courbe paramétrée par $c : t \mapsto (\cos\theta\cos t, \cos\theta\sin t, \sin\theta)$. Calculer la dérivée covariante du champs de vecteurs $\dot{c}(t)$ sur S le long de c.

Exercice 4 (Symboles de Christoffel)

Déterminer les symboles de Christoffel de la sphère unité au point $(1, 0, 0)$.

Exercice 5 (Symboles de Christoffel et première forme fondamentale)

On considère une surface régulière S de $\mathbb{R}^3$ et un paramétrage local F. On note $X_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}$

1 Rappeler la formule de calcul de $\frac{\partial}{\partial u_k} I(X_i, X_j)$.

2 Montrer que $\frac{\partial}{\partial u_k} g_{ij} = \sum_m (\Gamma_{ki}^m g_{mj} + \Gamma_{kj}^m g_{mi})$.

3 Calculer de même $\frac{\partial}{\partial u_i} g_{kj}$ et $\frac{\partial}{\partial u_j} g_{ik}$.

4 Déterminer les symboles de Christoffel en fonction des coefficients de la première forme fondamentale.