UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Feuille de TD n°3, Surfaces

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

1. Cartographie

Exercice 1 (Applications conformes)

Soit g et g' deux produits scalaires euclidiens sur $\mathbb{R}^n$. Montrer en utilisant la règle des sinus dans un triangle $a/\sin\hat{A} = b/\sin\hat{B}$ que g et g' définissent les mêmes mesures d'angle non orientés si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que $g = cg'$.

Exercice 2 (Cartes)

On cherche des applications d'un ouvert du plan $\mathbb{R}^2$ dans un ouvert de la sphère S^2 de $\mathbb{R}^3$ qui conservent les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires.

1 Traduire chacune de ces trois propriétés à l'aide des formes fondamentales.

2 Les coordonnées sphériques donnent-elles une application qui conserve les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires ?

3 La projection stéréographique depuis le pôle nord conserve-t-elle les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires ?

4 L'application du cylindre dans la sphère

$$\begin{array}{ccc}]0,2\pi[\times]-1,1[& \to & S^2 \\ (\theta,h) & \mapsto & \begin{pmatrix} \sqrt{1-h^2}\cos\theta \\ \sqrt{1-h^2}\sin\theta \\ h \end{pmatrix} \end{array}$$

conserve-t-elle les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires ?

5 L'application du cylindre dans la sphère

$$\begin{array}{ccc}]0,2\pi[\times]-\infty,+\infty[& \to & S^2 \\ (\theta,x) & \mapsto & \begin{pmatrix} \sqrt{1-h^2(x)}\cos\theta \\ \sqrt{1-h^2(x)}\sin\theta \\ h(x) \end{pmatrix} \end{array}$$

avec $h(x) = \tanh(x)$ conserve-t-elle les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires ?

2. Calcul d'aires

Exercice 3 (Sphère)

Calculer l'aire de la sphère en coordonnées sphériques.

3. Seconde forme fondamentale

Exercice 4 (Sphère)

Calculer la seconde forme fondamentale de la sphère. En déduire sa courbure de Gauss et ses directions principales.

Exercice 5 (Cylindre)

1 Déterminer les plans tangents et un champs de vecteurs normaux au cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$.
2 Déterminer l'application de Weingarten en chaque point p du cylindre.
3 En déduire sa courbure de Gauss et ses directions principales.

Exercice 6 (Paraboloïde hyperbolique)

Reprendre l'exercice précédent pour le paraboloïde hyperbolique d'équation $z = y^2 - x^2$ au point $p(0, 0, 0)$.

4. Surfaces réglées

Exercice 7 (Définition)

1 Une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ est dite réglée si elle admet des paramétrages locaux de la forme $F(t, s) = c(t) + sv(t)$ pour $t, s) \in I \times J$ où c est une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$ paramétrée sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et $v\ : I \to \mathbb{R}^3_{ev}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $v(t)$ et $\dot{c}(t)$ partout indépendant. Montrer que si J est un petit intervalle autour de 0, F est alors un paramétrage régulier.
2 Montrer que la courbure de Gauss d'une surface réglée est négative en tout point.

Exercice 8 (Exemples)

1 Montrer qu'un cylindre est une surface réglée.
2 Montrer qu'un paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$ est réglé sur la droite d'équation $y = z = 0$.
3 Montrer qu'un hyperboloïde à une nappe d'équation $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ est réglé sur le cercle à l'altitude 0.