UNIVERSITÉ DE RENNES 1

# Géométrie différentielle

## Feuille de TD n°2, Surfaces

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension $n$. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

## 1. Exemples de surfaces dans $\mathbb{R}^3$

### Exercice 1 (Plans)

Montrer que le plan d'équation $x + y + z = 1$ est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

### Exercice 2 (Surfaces paramétrées)

La surface paramétrée par $(u, v) \mapsto (u + v^2, u^2 - v^2, v)$ est-elle régulière au voisinage de $A(1, -1, -1)$ ?

### Exercice 3 (Surfaces implicites)

**1** L'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ est-il une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Le décrire.
**2** L'ensemble d'équation $(x^2 + y^2 + z^2 - 4)^2 = 0$ est-il une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Le décrire.
**3** L'ensemble d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ est-il une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Le décrire. Montrer que tous les chemins du point $A(1, 0, 1)$ au point $B(1, 0, -1)$ passent par un même point à déterminer.
**4** L'ensemble d'équation $x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 2z = 5$ est-il une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Le décrire.
**5** L'ensemble d'équation $2x^2 + 3y^2 = 1$ est-il une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Le décrire.

## 2. Applications régulières

### Exercice 4 (Applications régulières ?)

**1** La restriction à la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = -5$ de la fonction $(x, y, z) \mapsto 5x^6 + 7xy^4 - 2$ est-elle régulière ?
**2** La restriction à la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = -5$ de la fonction $(x, y, z) \mapsto \sqrt{|x|}$ est-elle régulière ?

### Exercice 5 (Difféomorphismes)

**1** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\ : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que le graphe de $f$ est difféomorphe à $U$.
**2** Les surfaces $\mathcal{E}$ d'équation $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$ et $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sont-elles difféomorphes ?
**3** Les surfaces $\mathcal{C}$ d'équation $2x^2 + 3y^2 = 1$ et $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sont-elles difféomorphes ?

## 3. Plans tangents

### Exercice 6 (Détermination de plan tangent)

**1** Déterminer le plan tangent en $A(1,-1,-1)$ à la surface paramétrée par $(u,v) \mapsto (u+v^2, u^2-v^2, v)$.
**2** Déterminer le plan tangent en $A(1,1,-1)$ à la surface d'équation $x^5+y^5+z^5=1$.
**3** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\ : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Déterminer le plan tangent au graphe de $f$ en chacun de ses points.

### Exercice 7 (Détermination de minima)

Dans tout l'exercice, $r$ et $h$ parcourt $]0,+\infty[$
**1** Déterminer le volume $V(r,h)$ d'un cylindre plein de hauteur $h$ et de rayon $r$.
**2** Déterminer l'aire $A(r,h)$ d'une casserole de hauteur $h$ et de rayon $r$.
**3** Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ avec coordonnées $(r,h,v)$ d'équation $v=V(r,h)$ est une surface régulière.
**4** Déterminer le minimum de la fonction $A(r,h)$ sur la courbe d'équation $V(r,h)=1$. Interpréter ce résultat.