UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie différentielle

Feuille de TD n°1, Courbes

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n.

1. Courbes dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 (Hélice)

1 Soient r et h deux nombres réels strictement positifs. La courbe paramétrée suivante, appelée hélice, est-elle régulière ?

$$c : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \end{array}$$

2 La courbe paramétrée suivante est-elle régulière ?

$$d : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 2 (Reparamétrisation d'une courbe régulière)

Montrer que la reparamétrisation d'une courbe régulière est encore régulière.

Exercice 3 (Equivalence)

1 Les courbes paramétrées suivantes sont-elles équivalentes ?

$$c : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad d : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \end{array}$$

2 Les courbes paramétrées suivantes sont-elles équivalentes ?

$$c : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad d : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 4 (Différents paramétrages par longueur d'arc)

Montrer que deux paramétrages par longueur d'arc d'une même courbe régulière orientée diffèrent au plus par un changement de paramétrage de la forme $t \mapsto t_0 + t$.

Exercice 5 (Calcul de longueur)

1 Calculer la longueur de la portion d'hélice

$$c : \begin{array}{rcl} [0, 1] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \end{array}$$

2 Déterminer un paramétrage de cette portion d'hélice par la longueur d'arc.

Exercice 6 (Approximation par lignes polygonales)

1 On rappelle qu'une ligne polygonale P de $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'un uplet $P = (a_0, a_1, \cdots, a_k)$ de points de $\mathbb{R}^n$. On supposera aussi que deux points consécutifs sont distincts. Rappeler la formule pour la longueur d'une ligne polygonale P.
2 On cherche à montrer le théorème suivant.

Théorème. *Soit $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta >$ tel que pour toute partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ de $[a, b]$ de pas inférieur à δ,*

$$L[P] \leq L[c] \leq L[P] + \epsilon$$

où $P = (c(t_0), c(t_1), \cdots, c(t_m))$ est la ligne polygonale simplement inscrite dans la courbe c associée à la partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ de $[a, b]$.

(1) Écrire en termes de quantificateurs, en partant d'un $\epsilon_1 > 0$, le théorème des sommes de Riemann pour la fonction $[a, b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \| \dot{c}(t) \|$.

(2) Écrire en termes de quantificateurs en partant d'un $\epsilon_2 > 0$ la propriété de continuité uniforme des fonctions composantes $[a, b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dot{c}_j(t)$.

(3) Soit une partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ de $[a, b]$. Écrire en termes de quantificateurs le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction $[t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dot{c}_j(t)$ et la valeur $\frac{\dot{c}_j(t_{i+1}) - \dot{c}_j(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$.

3 Majorer la quantité $|\| c(t_{i+1}) - c(t_i) \| - \| \dot{c}(t_{i+1}) \| (t_{i+1} - t_i)|$ par $\sqrt{n}\epsilon_2(t_{i+1} - t_i)$.
4 Majorer la quantité $|L[c] - L[P]|$ par $\epsilon_1 + \sqrt{n}\epsilon_2(b - a)$.
5 Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta >$ tel que pour toute partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ de $[a, b]$ de pas inférieur à δ,

$$L[P] - \epsilon \leq L[c] \leq L[P] + \epsilon.$$

6 Conclure à l'aide de l'inégalité triangulaire sur les polygones.

2. Courbes planes

Exercice 7 (Calculs de courbure)

On considère l'espace affine euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
1 Calculer la fonction courbure d'un cercle de rayon $r > 0$.
2 Soit $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc. Soit R la rotation de centre 0 et d'angle α, et S la symétrie d'axe $x = y$. Déterminer la fonction courbure de $R \circ c$ et celle de $S \circ c$.

Exercice 8 (Courbure en un point extremal)

Soit $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc. On suppose que c reste dans le disque de rayon r et qu'au point de paramètre τ, $\| c(\tau) \| = r$.
1 Montrer en dérivant une fois la fonction $t \mapsto \| c(t) \|^2$ que $\ddot{c}(\tau)$ est colinéaire à $c(\tau)$?
2 Montrer en dérivant à nouveau la fonction $t \mapsto \| c(t) \|^2$ que la courbure en τ vérifie $|\kappa(\tau)| \geq 1/r$.

Exercice 9 (Construction d'une courbe plane à courbure prescrite)

Le but de l'exercice est de montrer le théorème suivant.

Theorem 1. *Soit I un intervalle et $\kappa : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors, il existe une courbe plane $c : I \to \mathbb{R}^2$ paramétrée par la longueur d'arc et de fonction courbure κ. Cette courbe est unique à composition au but par un déplacement près.*

1 On considère le système d'équations différentielles linéaire du premier ordre

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c \\ v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ v \\ n \end{pmatrix}.$$

où les fonctions $c, v, n\ :\ I \to \mathbb{R}^2$ sont les inconnues. Montrer que ce système admet une unique solution $(c(t), v(t), n(t))$ avec pour valeur initiale un vecteur fixé (c_0, v_0, n_0) avec (v_0, n_0) base orthonormée directe.
2 Écrire un système d'équations différentielles linéaire du premier ordre satisfait par le vecteur $(< v, v >, < n, n >, < v, n >)$.
3 Montrer que pour les solutions obtenues précédemment, $(v(t), n(t))$ reste un repère orthonormé direct.
4 En déduire que la courbe c obtenue est paramétrée par la longueur d'arc et que sa fonction courbure est κ.
5 Conclure.

Exercice 10 (Courbure totale)

1 Calculer la somme des mesures des angles extérieurs d'un triangle et d'un carré.
2 Déterminer la fonction courbure et la courbure totale de l'ovale paramétré par $c\ :\ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t))$.

3. Courbes de $\mathbb{R}^3$

Exercice 11 (Formules de Frenet)

Démontrer les formules de Frenet pour les courbes paramétrées par la longueur d'arc dans $\mathbb{R}^3$.