UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des nombres

Interrogation 2 (19 novembre 2010)

Documents et calculatrice sont autorisés. Les téléphones portables sont interdits.

Durée : 1 heure

Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration.

Exercice 1

Quel est le polynôme minimal de $\xi = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$? Le nombre ξ est-il un entier algébrique ?

Exercice 2

On considère le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$. Soit $\theta \in \mathbb{C}$ une racine de P.

1. Expliciter la matrice $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta^{i+j}))_{0 \leqslant i,j \leqslant 2}$.
2. Calculer le discriminant de la base $(1, \theta, \theta^2)$ de $\mathbb{Q}(\theta)$ sur $\mathbb{Q}$.
3. Déterminer l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\theta)$, et en donner une base comme $\mathbb{Z}$-module libre.

Exercice 3

On considère le polynôme $P(X) = X^3 - X + 2$. Soit $\theta \in \mathbb{C}$ une racine de P.

1. Expliciter la matrice $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta^{i+j}))_{0 \leqslant i,j \leqslant 2}$.
2. Calculer le discriminant de la base $(1, \theta, \theta^2)$ de $\mathbb{Q}(\theta)$ sur $\mathbb{Q}$.
3. Montrer que $\frac{\theta}{2}$ n'est pas un entier algébrique.
4. Montrer que $\frac{\theta^2}{2}$ n'est pas un entier algébrique.
5. Écrire la matrice de la multiplication par $\frac{\theta+\theta^2}{2}$, vue comme endomorphisme du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}(\theta)$, dans la base $(1, \theta, \theta^2)$, et calculer son déterminant.
6. En déduire que $\frac{\theta+\theta^2}{2}$ n'est pas un entier algébrique.
7. Déterminer l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\theta)$, et en donner une base comme $\mathbb{Z}$-module libre.