*Théorie des nombres*

Feuille de TD n∘2

## Exercice 1

1. Montrer que le polynôme $2X^3 - 2X + 5$ n'a pas de racine rationnelle.
2. Soit $\zeta$ une solution complexe de l'équation $2X^3 - 2X + 5$. Est-ce un entier algébrique ? Déterminer un entier naturel $c$ tel que $c\zeta$ soit un entier algébrique.
3. Les solutions complexes de l'équation
$$X^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) X - 1$$
sont-elles des nombres algébriques ? sont-elles des entiers algébriques ? Déterminer pour elles, un polynôme annulateur sur $\mathbf{Z}$.
4. Déterminer un polynôme annulateur sur $\mathbf{Z}$ de $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$.

## Exercice 2

1. Déterminer le degré sur $\mathbf{Q}$ de l'extension $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{5})$.
2. Le nombre réel $\sqrt{5}$ est-il dans $\mathbf{Q}(\sqrt[6]{5})$ ? et dans $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{5})$ ?
3. Le nombre complexe $\theta = j\sqrt[3]{5}$ est-il dans l'image de tous les plongements complexes de $\mathbf{Q}(\theta)$ ?
4. Existe-t-il un plongement de $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{5})$ dans $\mathbf{C}$ qui envoie $\sqrt[3]{5}$ sur $5$ ?

## Exercice 3

1. Soit $A$ un anneau commutatif unitaire et $I$, $J$ deux des ses idéaux. Démontrer que
$$\frac{A/I}{\overline{J}} \equiv \frac{A}{(I,J)}$$
où $\overline{J}$ désigne l'idéal de $A/I$ engendré par les classes d'éléments de $J$. Par abus de notation, on confond en général $\overline{J}$ et $J$.
2. L'anneau $\mathbf{Z}[X]/(5, X^7+3)$ est-il fini ? Combien a-t-il d'éléments ?

## Exercice 4

Les polynômes symétriques élémentaires en $n$ indéterminées sont par définition

$$\begin{aligned}
s_1(t_1, t_2, \cdots, t_n) &:= t_1 + t_2 + \cdots + t_n \\
s_2(t_1, t_2, \cdots, t_n) &:= t_1t_2 + t_1t_3 + \cdots + t_2t_3 + t_2t_4 + \cdots + \cdots t_{n-1}t_n \\
&\vdots \\
s_n(t_1, t_2, \cdots, t_n) &:= t_1t_2 \cdots t_n.
\end{aligned}$$

1. Soit $F(X) = a(X - t_1)(X - t_2) \cdots (X - t_n)$. Développer $F(X)$ en puissances de $X$.
2. Ecrire $t_1^3 + t_2^3 + t_3^3$ comme polynôme à coefficients entiers de $s_1$, $s_2$, $s_3$.
3. Soit $M$ une matrice $3 \times 3$. Montrer que si le polynôme caractéristique de $M$ est à coefficents entiers, les quantités $Tr(M)$, $Tr(M^2)$ et $Tr(M^3)$ sont entières.
4. Soit $m_1, m_2, \cdots, m_n$, $n$ entiers naturels. Quel est le terme dominant de $s_1^{m_1} s_2^{m_2} \cdots s_n^{m_n}$ ?
5. Ranger dans l'ordre lexicographique décroissant les monômes du polynôme symétrique

$$f(t_1, t_2, t_3) = t_1^2 t_2^3 + t_1^2 t_3^3 + t_2^2 t_1^3 + t_2^2 t_3^3 + t_3^2 t_1^3 + t_3^2 t_2^3.$$

6. Ecrire $f$ comme polynôme à coefficients entiers en les polynômes symétriques élémentaires.
7. Soit $\theta$ en entier algébrique de degré 3 et $\theta_2$ et $\theta_3$ ses conjugués. Montrer que $f(\theta, \theta_2, \theta_3)$ est un entier naturel.

## Exercice 5

1. Montrer que l'anneau $\mathbf{Z}[(1 + \sqrt{N})/2]$ est le $\mathbf{Z}$-module libre de base $(1, (1 + \sqrt{N})/2)$
2. Montrer que si $a$ et $b$ sont deux entiers de même parité $\frac{a+b\sqrt{N}}{2}$ est dans $\mathbf{Z}[(1 + \sqrt{N})/2]$.

## Exercice 6

1. Montrer que les unités de l'anneau des entiers d'un corps de nombres sont les entiers de norme 1 ou $-1$.
2. Soit $\zeta$ un entier algébrique, unité de l'anneau des entiers d'un corps de nombres, de polynôme minimal sur $\mathbf{Z}$ $P = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Que peut-on dire de $a_d$ et de $a_0$ ? Déterminer en fonction de $\zeta$ et des $a_i$ l'inverse de $\zeta$.

## Exercice 7

1. Expliciter les deux plongements complexes du corps quadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{13})$.
2. Calculer la norme et la trace de l'élément $a + b\sqrt{13}$ de $\mathbf{Q}(\sqrt{13})$.
3. Calculer le discriminant de la $\mathbf{Q}$-base $(1, \sqrt{13})$ de $\mathbf{Q}(\sqrt{13})$.
4. Déterminer une $\mathbf{Q}$-base de $\mathbf{Q}(\sqrt{13})$ formée d'entiers algébriques et de discriminant strictement plus petit que l'entier obtenu dans la question précédente.

## Exercice 8

1. Le nombre complexe $\frac{5+3\sqrt{-15}}{2}$ est-il un entier algébrique ? Si oui, déterminer un polynôme minimal sur $\mathbf{Z}$.

2. Quel est l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt{-n})}$ des entiers du corps de nombres quadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{-n})$ où $n$ est un entier naturel ?
3. Quelles sont les unités de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt{-n})}$ où $n$ est un entier naturel ?
4. En factorisant 6 (resp. 14) montrer que l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-6})$ (resp.$\mathbf{Q}(\sqrt{-10})$) n'est pas factoriel.

## Exercice 9

**1** Soit $K$ un corps de nombres. Soit $a$ un élément primitif de $K$. Rappeler le lien entre le polynôme minimal de $a$ sur $\mathbf{Q}$ et la trace ou la norme de $a$.
**2** Calculer la norme de $a+1$ et celle de $a^2+a$ dans $\mathbf{Q}[X]/(X^3-X-2)$ où $a=[X]$.

## Exercice 10

**1** Montrer qu'après un changement de variable affine tout polynôme $P$ unitaire de $\mathbf{Q}[X]$ de degré 3 s'écrit sous la forme $X^3+pX+q$. Montrer que $P$ est alors irréductible si et seulement si $X^3+pX+q$ l'est.
**2** Soit $X^3+pX+q$ un polynôme irréductible de $\mathbf{Q}[X]$. Soit $K=\mathbf{Q}[X]/X^3+pX+q$ et $a$ un élément de $\sigma(K)$ où $\sigma$ est un plongement complexe de $K$. Montrer que $a$ est un entier algébrique si et seulement si $Tr(a)$, $Tr(a^2)$ et $Tr(a^3)$ sont des entiers relatifs. Montrer que si $a$ et $b$ sont deux entiers algébriques $Tr(ab)$ est un entier.