Question préliminaire.

(a) Déterminer tous les idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}$. Donner tous les idéaux $I$ de $\mathbb{Z}$ tels que $\mathbb{Z}/I$ soit un corps.

(b) Montrer que le groupe multiplicatif d'un corps fini est cylique.

1. Déterminer tous les polynômes irréductibles de degré 2 de $\mathbb{F}_3[X]$. (Rappel : $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$).
2. Soit $f = 2X^5 + X^4 + 2X^3 + X + 2$.

(a) Donner la classe $\bar{f}$ de $f$ dans l'anneau $\frac{\mathbb{F}_3[X]}{(2X^2+2)}$.
(b) Donner la classe $\widetilde{f}$ de $f$ dans l'anneau $\frac{\mathbb{F}_3[X]}{(2X^2+X+1)}$.
(c) $f$ a-t-il des racines dans $\mathbb{F}_3$?
(d) $f$ est-il irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$?

3. On considère l'anneau $A = \frac{\mathbb{F}_3[X]}{(f)}$. Soit $f_1 = 2X^2 + 2X + 1$.

(a) Montrer que $A$ est isomorphe à un anneau produit $\frac{\mathbb{F}_3[X]}{(f_1)} \times \frac{\mathbb{F}_3[X]}{(f_2)}$. On précisera le polynôme $f_2$ et l'isomorphisme mis en jeu. Indication : lemme chinois.
(b) $A$ est-il un corps? $A$ est-il un anneau intègre?

4. Soient $A_1 = \frac{\mathbb{F}_3[X]}{(f_1)}$ et $A_2 = \frac{\mathbb{F}_3[X]}{(f_2)}$. Soit $\omega$ une racine de $f_2$ dans $A_2$.

(a) $A_1$, $A_2$ sont-ils des corps?
(b) $\omega$ est-il un générateur du groupe multiplicatif $A_2^\star$?
(c) Donner le polynôme minimal de $\omega^2$ sur $\mathbb{F}_3$.