Discussion sur un changement de repère.

Soit $\mathcal{R}_I := (O, A, B; I)$ un repère projectif de $\mathbb{P}^2(K)$. On veut voir comment les coordonnées d'un point $C \neq A, B, O$ dans le repère $\mathcal{R}_I$ changent quand on change le point I.

Soit J un point tel que $\mathcal{R}_J := (O, A, B; J)$ soit encore un repère projectif de $\mathbb{P}^2$, alors J a des coordonnées $[a : b : 1]$ dans le repère $\mathcal{R}_I$. Le choix du repère $\mathcal{R}_I$ correspond à une homographie ϕ_I de $\mathbb{P}^2$. De même, $\mathcal{R}_J$ définit une homographie de $\mathbb{P}^2$. On doit comprendre le changement de repère $\Psi := \phi_j \circ \phi_I^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^2 \arrow[r, "Id_{\mathbb{P}^2}"] \arrow[d, "\phi_I"'] & \mathbb{P}^2 \arrow[d, "\phi_J"] \\
\mathbb{P}^2 \arrow[r, "\Psi"] & \mathbb{P}^2
\end{tikzcd}$$

- Par définition, on a $\phi_I(O) = [1 : 0 : 0]$, $\phi_I(A) = [0 : 1 : 0]$, $\phi_I(B) = [0 : 0 : 1]$, $\phi_I(I) = [1 : 1 : 1]$ et $\phi_I(J) = [a : b : 1]$.
- De même, $\phi_J(O) = [1 : 0 : 0]$, $\phi_J(A) = [0 : 1 : 0]$, $\phi_J(B) = [0 : 0 : 1]$ et $\phi_J(J) = [1 : 1 : 1]$.
- Ainsi $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ et $[0 : 0 : 1]$ sont fixés par Ψ, et donc les droites $\{X = 0\}$, $\{Y = 0\}$ et $\{Z = 0\}$ aussi (globalement).
- Ψ est une homographie de $\mathbb{P}^2(K)$, elle est donc induite par une matrice $M \in \mathbb{P}Gl_3(K)$, qui d'après le point précédent est diagonale :
$$M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$
Comme $M \in \mathbb{P}Gl_3(K)$ on peut supposer $\gamma = 1$, ce qu'on fait.
- On a $[1 : 1 : 1] = \phi_J(J) = \Psi([a : b : 1]) = M.[a : b : 1] = [a\alpha : b\beta : 1]$, d'où $\alpha = 1/a$ et $\beta = 1/b$ et $M = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- On voit que si C est un point de coordonnées $[u : v : w]$ dans le repère $\mathcal{R}_I$, puisque $M.[u : v : w] = [u/a : v/b : w]$, alors C a les coordonnées $[u/a : v/b : w]$ dans le repère $\mathcal{R}_J$.

Finalement,
- Si $uvw \neq 0$ alors, pour tout (τ, μ) tel que $\tau\mu \neq 0$ on peut choisir J de sorte que $[u/a : v/b : w] = [\tau : \mu : 1]$.
- Si $uvw = 0$ alors C est dans l'une des droites $\{X = 0\}$, $\{Y = 0\}$, $\{Z = 0\}$, disons la première, C a des coordonnées $[0 : \rho : 1]$ dans le repère $\mathcal{R}_I$ et, pour tout $\mu \neq 0$, on peut choisir J de sorte que, dans le repère $\mathcal{R}_J$, C ait les coordonnées $[0 : \rho/b : 1] = [0 : \mu : 1]$.

2