



Théorie des groupes et géométrie

Examen d'Avril

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. L'exercice 4 peut être traité sur cette feuille. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie...

Durée : 2 heures

Numéro d'anonymat :

Exercice 1(Formes σ -sesquilinéaires sur $\mathbb{F}_{25}$ (5 points))

- On considère l'application $\sigma : \mathbb{F}_{25} \rightarrow \mathbb{F}_{25}, \lambda \mapsto \lambda^5$. Montrer que c'est un automorphisme involutif du corps $\mathbb{F}_{25}$.
- Les formes suivantes sur $E := \mathbb{F}_{25}^3$ sont-elles σ -sesquilinéaires ?

$$f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = x(x')^5 + 3z(y')^5 + 3y(z')^5.$$

$$f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = x^5(x')^5 + x^5(y')^5 + y^5(x')^5.$$

$$f_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = 3x(x')^5 + z(y')^5 + y(z')^5.$$

- Parmi les formes σ -sesquilinéaires précédentes, lesquelles sont équivalentes ?

Exercice 2

(Action symplectique sur les droites et les plans (5 points))

- Soit E un espace muni d'une forme alternée non-dégénérée f . Soit G le groupe (dit symplectique) des isométries de (E, f) . Combien y a-t-il d'orbites dans l'action du groupe G sur l'ensemble $P(E)$ des droites de E ?
- Soit E un espace muni d'une forme alternée non-dégénérée f . Quelles sont les restrictions possibles à équivalence près de f sur les plans de E ?
- Combien y a-t-il d'orbites dans l'action du groupe symplectique d'un espace vectoriel E de dimension 6 muni d'une forme alternée non-dégénérée sur l'ensemble des plans de E ?

Exercice 3

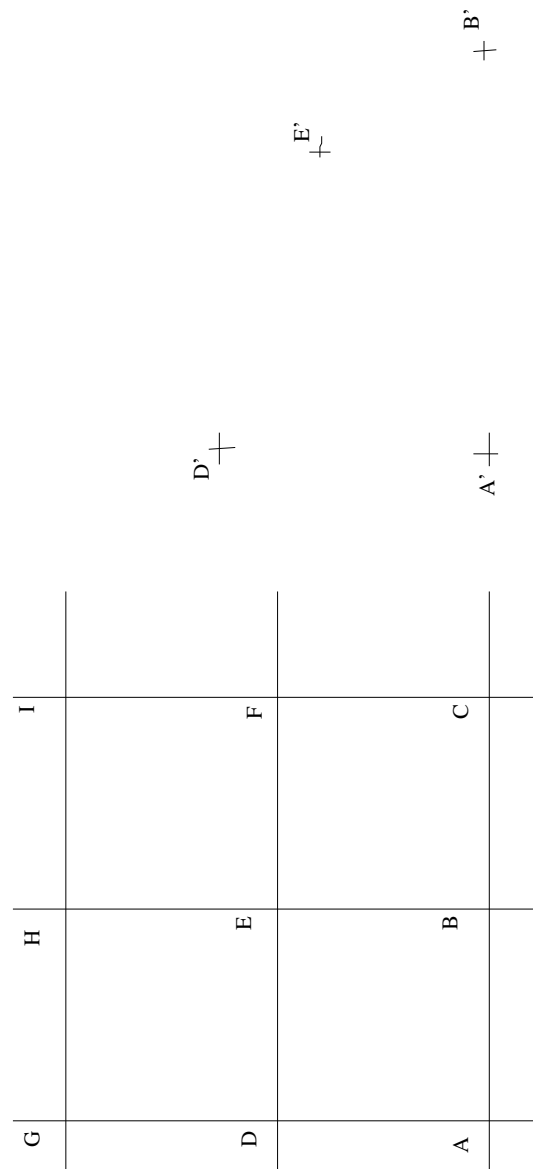
(Coloriages (5 points))

- Rappeler la formule de Burnside qui calcule le nombre d'orbites de l'action d'un groupe fini sur un ensemble fini.
- Rappeler la liste des éléments du groupe d'isométries directes (déplacements) d'un tétraèdre régulier. On fera une figure pour chaque type d'axe de rotation, en indiquant l'ordre des rotations.
- De combien de façons différentes peut-on peindre les faces d'un tétraèdre régulier avec c couleurs ? Chaque face n'est peinte que d'une couleur. On ne distingue pas deux résultats qui se déduisent l'un de l'autre par un déplacement du tétraèdre.

Exercice 4

(Homographie plane (5 points))

1 Etant données les images $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $C' = h(C)$, et $D' = h(D)$ par une homographie h de $P^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, construire à la règle les images des autres points. On indiquera l'ordre dans lequel les constructions sont effectuées.



2 Suffirait-il de connaître les images $A' = h(A)$, $B' = h(B)$ et $C' = h(C)$?