UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des groupes et géométrie

Examen d'Avril

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. L'exercice 4 peut être traité sur cette feuille. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie...

Durée : 2 heures Numéro d'anonymat :

Exercice 1 (Formes σ-sesquilinéaires sur $\mathbb{F}_{25}$ (5 points))

1 On considère l'application $\sigma : \mathbb{F}_{25} \to \mathbb{F}_{25}, \lambda \mapsto \lambda^5$. Montrer que c'est un automorphisme involutif du corps $\mathbb{F}_{25}$.

Solution : Il faut montrer que σ est un morphisme de corps, puis que c'est une bijection. La bijection inverse est alors automatiquement un morphisme de corps. Pour le premier point, σ est facilement multiplicative et $\sigma(1) = 1$. Pour montrer que $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$, on utilise la formule du binôme puis le fait que le corps $\mathbb{F}_5$ est de caractéristique 5. Pour le second point, il suffit de montrer que σ est injective puisque son ensemble de départ a le même cardinal fini que son ensemble d'arrivée. Pour cela, il suffit de dire que σ est un morphisme de corps.

2 Les formes suivantes sur $E := \mathbb{F}_{25}^3$ sont-elles σ-sesquilinéaires ?

$$f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = x(x')^5 + 3z(y')^5 + 3y(z')^5.$$

$$f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = x^5(x')^5 + x^5(y')^5 + y^5(x')^5.$$

$$f_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = 3x(x')^5 + z(y')^5 + y(z')^5.$$

Solution : Les formes f_1 et f_3 sont linéaires par rapport à la première variable, et en utilisant l'expression

$$f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = x\sigma(x') + 3z\sigma(y') + 3y\sigma(z')$$

on montre aussi qu'elles sont σ-semi linéaire par rapport à la seconde variable. Elles sont donc sesquilinéaires. Par contre, comme il n'y a au plus que cinq élément de $\mathbb{F}_{25}$ qui vérifient $\lambda^5 = \lambda$, il existe un $\lambda \in \mathbb{F}_{25}$ tel que $f_2(\lambda \cdot (1,1,1), (1,1,1)) = 3\lambda^5 \neq \lambda \cdot f_2((1,1,1),(1,1,1))$. La forme f_2 n'est donc pas sesquilinéaires.

3 Parmi les formes σ-sesquilinéaires précédentes, lesquelles sont équivalentes ?

Solution : Par un théorème du cours, c'est le rang qui classifie les formes sesquilinéaires sur les corps finis. Comme f_1 et f_3 ont même rang 3, elles sont équivalentes.

Exercice 2 (Action symplectique sur les droites et les plans (5 points))

1 Soit E un espace muni d'une forme alternée non-dégénérée f. Soit G le groupe (dit symplectique) des isométries de (E, f). Combien y a-t-il d'orbites dans l'action du groupe G sur l'ensemble $P(E)$ des droites de E ?

Solution : La restriction d'une forme alternée sur une droite est nulle. Les droites sont donc toutes isométriques. Par le théorème de Witt, toute isométrie entre deux droites se prolonge à l'espace E non dégénéré en un élément de G. Par conséquent, les droites sont toutes dans la même orbite pour l'action de G.

2 Soit E un espace muni d'une forme alternée non-dégénérée f. Quelles sont les restrictions possibles à équivalence près de f sur les plans de E ?

Solution : Les formes alternées sont classifiées à équivalence près par leur rang qui est toujours pair. Par conséquent, les restrictions à un plan sont donc la forme nulle ou une forme symplectique de rang 2.

3 Combien y a-t-il d'orbites dans l'action du groupe symplectique d'un espace vectoriel E de dimension 6 muni d'une forme alternée non-dégénérée sur l'ensemble des plans de E ?

Solution : Par la question précédente et par le théorème de Witt, on conclut comme dans la première question qu'il y a deux orbites sur l'ensemble des plans de E.

Exercice 3 (Coloriages (5 points))

1 Rappeler la formule de Burnside qui calcule le nombre d'orbites de l'action d'un groupe fini sur un ensemble fini.

Solution : Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini E. Alors le nombre N d'orbites se calcule par

$$N = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g \in G} \operatorname{card} Fix(\phi(g)) = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{x \in E} \operatorname{card} Stab(x).$$

2 Rappeler la liste des éléments du groupe d'isométries directes (déplacements) d'un tétraédre régulier. On fera une figure pour chaque type d'axe de rotation, en indiquant l'ordre des rotations.

Solution : Le groupe des déplacements du tétraède est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$. Il y a l'identité, les $8 = 4 \times 2$ rotations d'ordre 3, dont l'axe passe par un sommet et le centre de la face opposée, les 3 demi-tours (d'ordre 2) dont l'axe passe par les milieux de deux arêtes opposées.

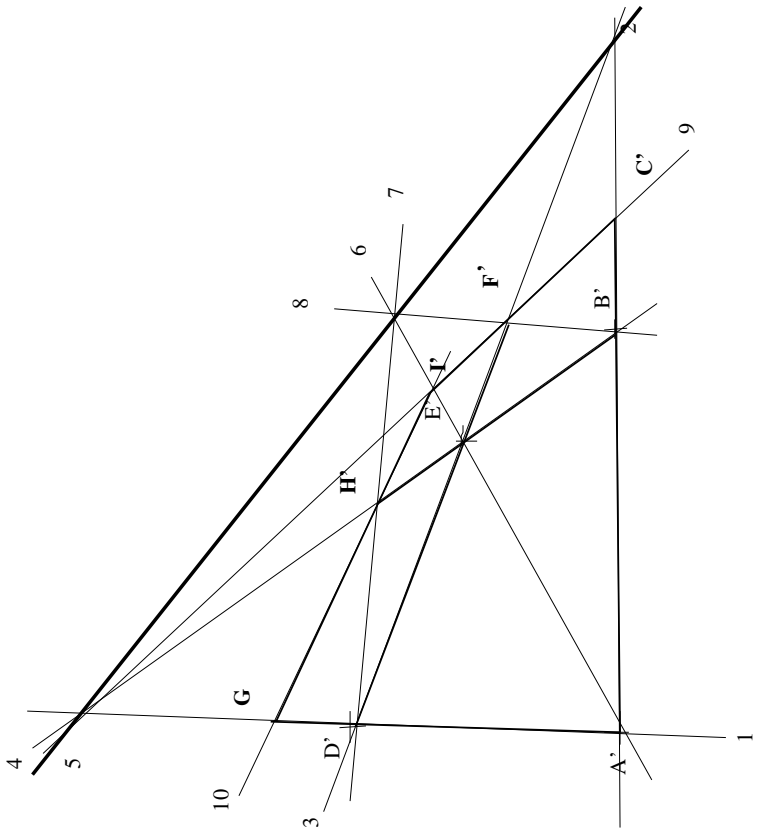
3 De combien de façons différentes peut-on peindre les faces d'un tétraèdre régulier avec c couleurs ? Chaque face n'est peinte que d'une couleur. On ne distingue pas deux résultats qui se déduisent l'un de l'autre par un déplacement du tétraèdre.

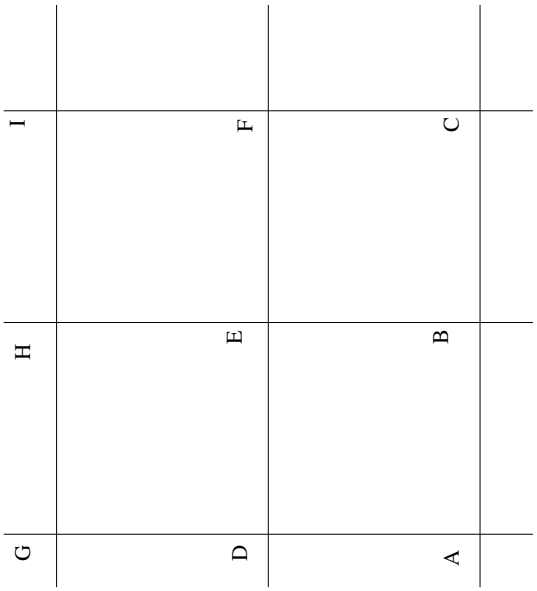
Solution : On considère l'ensemble des coloriages. Il est de cardinal c^4, puisqu'il s'agit de choisir une couleur pour chacune des quatre faces. Le groupe des dépalcements du tétraèdre agit sur cet ensemble et les façons différentes de colorier sont les orbites de cette action. Par la formule de Burnside, il suffit de déterminer le nombre de coloriages fixés par chacun des déplacements. Pour l'identité : c^4. Pour les rotations d'ordre 3 : c^2 (si l'axe est vertical, toutes les trois faces obliques doivent avoir la même couleur et la face horizontale doit avoir une couleur.) Pour les demi-tours : c^2 (les faces se correspondent deux à deux.). En conclusion, le nombre de façons différentes de colorier est

$$N = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g \in G} \operatorname{card} Fix(\phi(g)) = \frac{1}{c^4}(c^4 + 11c^2) = \frac{1}{c^2}(c^2 + 11).$$

Exercice 4 (Homographie plane (5 points))

1 Etant données les images $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $C' = h(C)$, et $D' = h(D)$ par une homographie h de $P^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, construire à la règle les images des autres points. On indiquera l'ordre dans lequel les contructions sont effectuées.





2 Suffirait-il de connaitre les images $A' = h(A)$, $B' = h(B)$ et $C' = h(C)$?

Solution : Non, il faut au moins avoir l'image d'un repère projectif.