Eléments de correction des feuilles de TD 4 et 5

Feuille 4

Exercice 5 On se place dans un plan projectif $P := P(V)$ (V est un espace vectoriel de dimension 3). On considère un point p de P : $p = \pi(x)$ ($\{p\} = P(W)$ où $W := Vect\{x\}$)) avec $x \in V$.

On se propose alors d'étudier l'ensemble $p^\vee$ des droites de P qui passent par p.

Tout d'abord, soit $d = P(F)$ une droite projective de P. F est un sev de dimension 2 de l'espace V de dimension 3 : F est un hyperplan de V. Il existe alors une forme linéaire φ_F non nulle sur V, unique à scalaire non nul près, telle que $F = Ker\ \varphi_F$. Réciproquement, le noyau de toute forme linéaire non nulle sur V est un hyperplan de V.

Autrement dit, pour toute droite projective d de P, il existe un unique point $\pi(\varphi)$ de $P(V^*)$ tel que $d = P(Ker\ \varphi)$. Réciproquement, à tout point $\pi(\varphi)$ de $P(V^*)$, on peut associer une droite projective $P(Ker\ \varphi)$ de P.

On identifie ainsi l'ensemble des droites projectives du plan projectif P à $P(V^*)$.

Soit donc $d = P(Ker\ \varphi)$ une droite projective de P. On a alors $p \in d$ ssi $W = Vect\{x\} \subset Ker\ \varphi$ (ssi $\varphi(x) = 0$) ssi $\varphi \in W' := \{\varphi \in V^* | \varphi_{|W} \equiv 0\}(= \{\varphi \in V^* | \varphi(x) = 0\})$ ssi $\pi(\varphi) \in P(W')(\subset P(V^*))$.

On peut ainsi identifier $p^\vee$ à $P(W')$. Comme $\dim P(W') = \dim W' - 1 = \dim V - \dim W - 1 = 1$, on peut considérer $p^\vee$ comme une droite projective du plan projectif $P(V^*)$.

Soit maintenant $l := P(Ker\ \psi)$ une droite projective de P qui ne passe pas par p. On considère l'application $F : p^\vee \to l; d \mapsto d \cap l$, autrement dit $F : P(W') \to P(Ker\ \psi); \pi(\varphi) \mapsto P(Ker\ \varphi \cap Ker\ \psi)$. Montrons que F est projective, i.e. qu'il existe une application linéaire $f : W' \to Ker\ \psi$ telle que $F = P(f)$.

Considérons une base $\{e_1, e_2\}$ de $Ker\ \psi$. Alors $\{e_1, e_2, x\}$ est une base de V ($x \notin Ker\ \psi$ car $p \notin l$) et si $\varphi \in W'$, $Ker\ \varphi \cap Ker\ \psi = Vect\{\varphi(e_2) - \varphi(e_1)e_2\}$. L'application $f : W' \to V^*; \varphi \mapsto \varphi(e_2)e_1 - \varphi(e_1)e_2$ est linéaire, et $F = P(f)$ $(P(Vect\{\varphi(e_2) - \varphi(e_1)e_2\}) = \{\pi(\varphi(e_2) - \varphi(e_1)e_2)\})$.

F est de plus une homographie. En effet, f est un isomorphisme : $\dim W' = 2 = \dim Ker\ \psi$ et si $\varphi \in Ker\ f$, i.e. $\varphi(e_2)e_1 - \varphi(e_1)e_2 = 0$ alors $\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = 0$, donc $\varphi \equiv 0$ ($\varphi(x) = 0$).

Remarque : On peut définir les coordonnes homogènes d'une droite projective $d = P(Ker\ \varphi)$ du plan projectif $P = P(V)$. Soit $\{f_1, f_2, f_3\}$ une base de V, on note $\{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$ la base duale de V^* associée. Les coordonnées de φ dans $\{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$ sont $(\varphi(f_1), \varphi(f_2), \varphi(f_3))$. Les coordonnées homogènes de d sont alors les coordonnées homogènes de $\pi(\varphi)$ par rapport au repère projectif $\pi(f_1^*), \pi(f_2^*), \pi(f_3^*), \pi(f_1^* + f_2^* + f_3^*)$ de $P(V^*)$, soient $[\varphi(f_1) : \varphi(f_2) : \varphi(f_3)]$.

Si on reprend les données ci-dessus, on peut exprimer l'application projective F sous la forme $F : p^\vee \to l; d = P(Ker\ \varphi) : [\varphi(e_1) : \varphi(e_2) : 0] \mapsto d \cap l : [\varphi(e_2) : -\varphi(e_1)]$ ($P(W')$ est muni du repère projectif $\pi(e_1^*), \pi(e_2^*), \pi(x^*), \pi(e_1^* + e_2^* + x^*)$ et l du repère projectif $\pi(e_1), \pi(e_2), \pi(e_1 + e_2)$).

Exercice 6 Soient p un point d'un plan projectif $P = P(V)$, l une droite projective de P ne passant pas par p. Soient d_1, d_2, d_3, d_4 quatre droites projectives de P, alors par définition, leur birapport est donné par le birapport des quatre points $d_1 \cap l, d_2 \cap l, d_3 \cap l, d_4 \cap l$ sur la droite d :

$$[d_1, d_2, d_3, d_4] := [d_1 \cap l, d_2 \cap l, d_3 \cap l, d_4 \cap l].$$

On a vu qu'il existait $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in V^*$ telles que $d_i = P(Ker\ \varphi_i)$. On considère alors le birapport de $\pi(\varphi_1), \pi(\varphi_2), \pi(\varphi_3), \pi(\varphi_4)$ dans $p^\vee$ (qui correspond à $P((Vect\{x\})')$ si $p = \pi(x)$), mais $F : p^\vee \to l; d \mapsto d \cap l$ est une homographie donc :

$$[\pi(\varphi_1), \pi(\varphi_2), \pi(\varphi_3), \pi(\varphi_4)] = [F(\pi(\varphi_1)), F(\pi(\varphi_2)), F(\pi(\varphi_3)), F(\pi(\varphi_4))] = [d_1 \cap l, d_2 \cap l, d_3 \cap l, d_4 \cap l].$$

Exercice 10 Indications pour le 1. : On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. En lui rajoutant la "droite (projective) à l'infini", on "complète" celui-ci en le plan projectif $P^2(\mathbb{R})$. Soit alors une homographie h de $P^2(\mathbb{R})$ dans lui-même. On suppose données les images $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $D' = h(D)$, $E' = h(E)$, et on se propose de construire à la règle non graduée seule les points $C' = h(C)$ et $F' = h(F)$ (dans un plan affine contenant les points A',B', C', D', E', F'). On va utiliser le fait qu'une homographie préserve les intersections : $h(d \cap d') = h(d) \cap h(d')$.

Remarque : Les points A, B, D, E forment un repère projectif de $P^2(\mathbb{R})$ et on sait que l'homographie h est alors uniquement déterminé par les images de ces 4 points (qui forment eux-mêmes un repère projectif de $P^2(\mathbb{R})$). La théorie nous dit donc que l'on peut construire les images de C et F à partir des images de A, B, D, E.

1. On trace les droites $(A'B')$ et $(E'D')$: elles se croisent en un point P' situé sur l'image par h de la droite à l'infini ((AB) et (ED) sont parallèles).

2. On trace les droites $(A'E')$ et $(B'D')$: elles se croisent en un point R' situé sur l'image par h de la droite à l'infini ((AE) et (BD) sont parallèles).

3. On trace la droite $(P'R')$ qui est l'image par h de la droite à l'infini.

4. Les droites (AD) et (BC) sont parallèles donc les droites $(A'D')$ et $(B'C')$ se croisent sur la droite $(P'R')$ en un point S' : on peut donc construire la droite $(B'C') = (B'S')$.

5. Soit O le centre de l'hexagone régulier $ABCDEF$: O est l'intersection de (AD) et (BE) et (AB) est parallèle è (OC). On construit alors le point $O' = h(O)$, intersection des droites $(A'D')$ et $(B'E')$, et on sait que les droites $(A'B')$, $(E'D')$ mais également $(O'C')$ s'intersectent en P' (les droites (AB), (OC),(ED) sont parallèles). On peut donc construire la droite $(O'C') = (O'P')$.

6. Les droites $(O'C')$ et $(B'C')$ s'intersectent en C'.

7. La droite (FE) est parallèle aux droites (AD) et (BC) donc $(F'E') = (E'S')$ (S' est l'intersection de $(A'D')$, $(B'C')$ et donc $(F'E')$).

8. $(O'C') = (F'C')$ et les droites $(F'E')$ et $(F'C')$ se croisent en F'.

Indications pour le 2. : On suppose ici données les images $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $C' = h(C)$,$D' = h(D)$, et on veut construire les points $E' = h(E)$ et $F' = h(F)$.

1. Les droites (AD) et (BC) sont parallèles : les droites $(A'D')$ et $(B'C')$ se croisent donc en un point P' situé sur l'image par h de la droite à l'infini.

2. Les droites $(A'B')$ et $(C'D')$ se croisent en un point Q', image par h de l'intersection Q des droites (AB) et (CD).

3. Les droites $(A'C')$ et $(B'D')$ se croisent en un point R', image par h de l'intersection R des droites (AC) et (BD).

4. La droite (QR) coupe la droite (AD) en le centre O de l'hexagone régulier $ABCDEF$: on construit alors l'intersection des droites $(Q'R')$ et $(A'D')$ qui est l'image O' du point O par h.

5. Les droites $(B'O')$ $(= (B'E'))$ et $(C'D')$ s'intersectent en un point S' situé sur l'image par h de la droite à l'infini ((BE) et (CD) sont parallèles).

6. On trace la droite $P'S'$, image par h de la droite à l'infini.

7. Les droites (BE), (CD) et (AF) sont parallèles : la droite $(A'F')$ passe donc également par le point S'.

8. Les droites $(A'S') = (A'F')$ et $(O'C') = (F'C')$ s'intersectent en le point F'.

9. Les droites (AD), (BC) et (FE) sont parallèles : la droite $(F'E')$ passe donc également par le point P'.
10. Les droites $(F'P') = (F'E')$ et $(B'O') = (B'E')$ s'intersectent en E'.

Feuille 5

Exemples de formes hermitiennes sur $\mathbb{C}^2$ (muni de sa base canonique) par rapport à la conjugaison complexe (la forme associée est alors sesquilinéaire par rapport à cet automorphisme du corps $\mathbb{C}$, et à symétrie hermitienne) :

- $q_1(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x\bar{x} - i\bar{x}y + ix\bar{y} + 5y\bar{y}$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

  On retrouve ainsi facilement la matrice de l'application sesquilinéaire f_1 dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ et on a

$$f_1(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}}$$

  Déterminons le cône de f_1 : $C(f_1) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid f_1(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = q_1(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = 0\}$. Pour cela, reprenons notre forme hermitienne q_1 :

$$q_1(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x\bar{x} - i\bar{x}y + ix\bar{y} + 5y\bar{y} = (x - iy)(\bar{x} + i\bar{y}) - y\bar{y} + 5y\bar{y}$$

$$= (x - iy)\overline{(x - iy)} + 4y\bar{y} = |x - iy|^2 + |2y|^2.$$

  Ainsi, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(f_1)$ ssi $|x - iy|^2 + |2y|^2 = 0$ ssi $x = iy$ et $y = 0$ ssi $x = y = 0$.

  On a donc $C(f_1) = \{0\}$ et le seul espace totalement isotrope est l'espace réduit au vecteur nul et donc l'indice de f_1 est $\nu = 0$.

- $q_2(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = |x|^2 - 4|y|^2 + 2\ Re(x\bar{y}) + 2\ Im(\bar{x}y)$. Lorsque l'on a une écriture de ce type, la première chose à faire est de se ramener à l'écriture "classique" qui permet de récupérer facilement la forme sesquilinéaire hermitienne associée : on a $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ donc

$$q_2(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x\bar{x} - 4y\bar{y} + (x\bar{y} + \bar{x}y) + \frac{\bar{x}y - x\bar{y}}{i} = x\bar{x} + (1+i)x\bar{y} + (1-i)\bar{x}y - 4y\bar{y}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -4 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

On a donc (dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$)

$$f_2(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -4 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}}$$

Le cône de f_2 est donné par $C(f_2) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid q_2(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = 0\}$. Or $q_2(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x\bar{x} + (1+i)x\bar{y} + (1-i)\bar{x}y - 4y\bar{y} = |x + (1-i)y|^2 - 6|y|^2$ donc $(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(f_2)$ ssi $|x+(1-i)y|^2 = 6|y|^2$. Ainsi, $C(f_2) \neq \{0\}$ (ex: $x = \sqrt{3}, y = (1+i)/2 = 1/(1-i))$ et comme tout vecteur isotrope non nul engendre un SETI de dimension 1, $\nu \geq 1$.

De plus, on sait que l'indice ν de f_2 est inférieur ou égal à $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)/2 = 1$ et finalement $\nu = 1$.

Remarques : Soit f une forme sesquilinéaire hermitienne par rapport à la conjugaison complexe sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, et soit q la forme hermitienne associée. Alors pour tous $u, v \in E$,

$$q(u+v) = q(u) + f(u,v) + f(v,u) + q(v) = q(u) + 2Re(f(u,v)) + q(v)$$

et

$$q(u+iv) = q(u) + 2Re(-if(u,v)) - q(v) = q(u) + 2Im(f(u,v)) - q(v),$$

donc

$$f(u,v) = Re(f(u,v)) + iIm(f(u,v)) = \frac{1}{2}[q(u+v) + iq(u+iv) - (1+i)q(u) - (1-i)q(v)].$$

La forme hermitienne associée à une forme sesquilinéaire hermitienne par rapport à la conjugaison complexe est à valeurs réelles : $f(x,x) = \overline{f(x,x)}$.

Exemples de formes sesquilinéaires hermitiennes sur les corps finis :

- $E = (\mathbb{F}_4)^3$,

$$f_1(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1(x_2)^2 + x_1(y_2)^2 + y_1(x_2)^2 + z_1(z_2)^5 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}^{\sigma}$$

(σ est l'automorphisme de corps $\mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4$, $x \mapsto x^2$) est une forme σ-sesquilinéaire à symétrie hermitienne sur le $\mathbb{F}_4$-espace vectoriel E, non dégénérée.
(Remarque : les coefficients de f_1 sont dans $\mathbb{F}_2$.)

- $E = (\mathbb{F}_{7^4})^2$;

  $f_2(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = 2x_1(x_2)^{49} + 3x_1(y_2)^{49} + 3x_2(y_1)^{49} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}^{\sigma}$

  (σ est l'automorphisme de corps $\mathbb{F}_{7^4} \to \mathbb{F}_{7^4}, x \mapsto x^{49}$) est une forme σ-sesquilinéaire à symétrie hermitienne, sur le $\mathbb{F}_4$-espace vectoriel E, non dégénérée.
  (Remarque : les coefficients de f_2 sont dans $\mathbb{F}_7$.)

Exercice 8

1. Soient $E = M_n(\mathbb{R})$ et la forme quadratique $q_1(A) = tr(A^2)$ sur E. La forme billinéaire symétrique associée f_1 est donnée par

   $$f_1(A, B) = \frac{1}{2}(q_1(A+B) - q_1(A) - q_1(B)) = \frac{1}{2}(tr((A+B)^2) - tr(A^2) - tr(B^2)),$$

   et comme $tr((A+B)^2) = tr(A^2) + 2tr(AB) + tr(B^2)$ (tr(AB) = tr(BA)), on a finalement

   $$f_1(A, B) = tr(AB).$$

   On a $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \bigoplus A_n(\mathbb{R})$ où $S_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{R})$, celui constitué des matrices anti-symétriques. En effet, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = \frac{A+{}^tA}{2} + \frac{A-{}^tA}{2}$.
   De plus, $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux par rapport f_1 : soient $A \in S_n(\mathbb{R})$, $B \in A_n(\mathbb{R})$,

   $$f_1(A, B) = tr(AB) = tr({}^t(AB) = tr({}^tB{}^tA) = tr((-B)A) = -tr(BA) = -tr(AB),$$

   (${}^tB = -B$ et ${}^tA = A$). Ainsi, $tr(AB) = -tr(AB)$ et donc $f_1(A, B) = tr(AB) = 0$.

   On a donc une somme directe orthogonale par rapport à f_1 :

   $$M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\bigoplus} A_n(\mathbb{R})$$

   Or, sur $S_n(\mathbb{R})$ q_1 est définie positive : soit $A \in S_n(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$, $q_1(A) = tr(A^2) = tr({}^tAA) > 0$ ($(M, N) \mapsto tr({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$).
   De plus, q_1 est définie négative sur $A_n(\mathbb{R})$: soit $B \in A_n(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$, $q_1(B) = tr(B^2) = tr(-{}^tBB) = -tr({}^tBB) < 0$.

   Ainsi,

   $$sgn\ q_1 = (dim_{\mathbb{R}}(S_n(\mathbb{R})), dim_{\mathbb{R}}(A_n(\mathbb{R})) = (n(n+1)/2, n(n-1)/2).$$

2. On munit maintenant l'espace E de la forme quadratique $q_2(A) = tr(A^2) - (tr(A))^2$. La forme billinéaire symétrique associée f_2 est donnée par

$$f_2(A,B) = \frac{1}{2}(q_2(A+B) - q_2(A) - q_2(B)) = tr(AB) - tr(A)tr(B).$$

On a $M_n(\mathbb{R}) = Vect\{I_n\} \bigoplus S_n^{\{tr=0\}}(\mathbb{R}) \bigoplus A_n(\mathbb{R})$ où $S_n^{\{tr=0\}}(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques de trace nulle. En effet, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$A = \frac{A+{}^tA}{2} + \frac{A-{}^tA}{2} = \frac{tr(\frac{A+{}^tA}{2})}{n}I_n + (\frac{A+{}^tA}{2} - \frac{tr(\frac{A+{}^tA}{2})}{n}I_n) + \frac{A-{}^tA}{2}.$$

De plus, $Vect\{I_n\}$, $S_n^{\{tr=0\}}(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux deux à deux par rapport à f_2 : soient $a \in \mathbb{R}$, $A \in S_n^{\{tr=0\}}(\mathbb{R})$, $B \in A_n(\mathbb{R})$, alors

- $f_2(A,B) = tr(AB) - tr(A)tr(B) = tr(AB)$ $(tr(A) = tr(B) = 0)$ et donc $f_2(A,B) = f_1(A,B) = 0$, car $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux par rapport à f_1 et $S_n^{\{tr=0\}}(\mathbb{R})$ est un sev de $S_n(\mathbb{R})$.
- $f_2(aI_n, A) = af_2(I_n, A) = a[tr(I_nA) - tr(I_n)tr(A)] = a[(1-n)tr(A)] = 0$ (car $tr(A) = 0$),
- $f_2(aI_n, B) = 0$ de la même façon que ci-dessus, car $tr(B) = 0$.

On a donc une somme directe orthogonale par rapport à f_2 :

$$M_n(\mathbb{R}) = Vect\{I_n\} \overset{\perp}{\bigoplus} S_n^{\{tr=0\}}(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\bigoplus} A_n(\mathbb{R})$$

Or,

- sur $Vect\{I_n\}$, q_2 est définie négative : soit $a \neq 0$, $q_2(aI_n) = a^2q_2(I_n) = a^2[tr(I_n^2) = tr(I_n)^2) = a^2(n-n^2) = a^2n(1-n) < 0$ (sauf si n = 1 mais dans ce cas, $q_2 \equiv 0$...).
- sur $S_n^{\{tr=0\}}(\mathbb{R})$, q_2 est définie positive : soit $A \in S_n^{\{tr=0\}}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, $q_2(A) = tr(A^2) - tr(A)^2 = tr(A^2) = tr({}^tAA) > 0$.
- sur $A_n(\mathbb{R})$, q_2 est définie négative : soit $B \in A_n(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, $q_2(B) = tr(B^2) - tr(B)^2 = tr(B^2) = tr(-{}^tBB) = -tr({}^tBB) < 0$.

Ainsi,

$$sgn(q_2) = (dim_{\mathbb{R}}(S_n^{\{tr=0\}}(\mathbb{R})), dim_{\mathbb{R}}(Vect\{I_n\}) + dim_{\mathbb{R}}(A_n(\mathbb{R})) = (n(n+1)/2-1, 1+n(n-1)/2).$$

Exercice 11

1. Le groupe $O(1,1)$ n'agît pas transitivement sur les droites de $\mathbb{R}^2$. En effet, soient par exemple les droites (vectorielles) $d_1 := Vect\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$ et $d_2 := Vect\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ et soit une isométrie u de $(\mathbb{R}^2, q)$ telle que $u(d_1) = d_2$, alors $q(u(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})) = q(\alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = -\alpha^2$, mais $q(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = 1$, d'où une contradiction. On en déduit qu'aucune isométrie du groupe $O(1,1)$ n'envoie la droite d sur la droite d' : l'action du groupe $O(1,1)$ sur les droites de $\mathbb{R}^2$ n'est donc pas transitive.

2. Soit E un espace vectoriel réel muni d'une forme quadratique non dégénérée q. $O(q)$ est par définition le groupe formé des isométries de (E,q). Soient deux sev F et F' de E tels que $q_{|F}$ et $q_{|F'}$ ont la même signature. Les formes quadratiques $q_{|F}$ et $q_{|F'}$ sont donc équivalentes : il existe une isométrie u de $(F, q_{|F})$ dans $(F', q_{|F'})$. D'après le théorème de Witt, elle peut être prolongée en une isométrie de (E,q), et F et F' sont donc dans la même orbite sous l'action du groupe $O(q)$.

3. On munit l'espace $E = \mathbb{R}^3$ de la forme quadratique $q(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ non dégénérée de signature $(2,1)$, et le groupe $O(2,1)$ est alors le groupe des isométries de (E,q). On considère l'action de $O(2,1)$ sur les droites de $\mathbb{R}^3$. D'après la question précédente, on sait qu'il y a trois orbites pour cette action :

   - O_1 l'orbite constituée des droites F telle que $q_{|F}$ est de signature $(1,0)$ i.e. q est définie positive sur F (i.e. si $F = Vect\{v\}$, $q(v) > 0$),
   - O_2 l'orbite constituée des droites F telle que $q_{|F}$ est de signature $(0,1)$ i.e. q est définie négative sur F (i.e. si $F = Vect\{v\}$, $q(v) < 0$),
   - O_3 l'orbite constituée des droites F telle que $q_{|F}$ est de signature $(0,0)$ i.e. q est nulle sur F (i.e. si $F = Vect\{v\}$, $q(v) = 0$).