Théorie des groupes et géométrie

Contrôle continu
Corrigé

Durée : 2 heures
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (Questions de cours (3 points))

1 L'ensemble des permutations de profil $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ avec l'identité est-il un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_6$.

Solution : Le groupe $\mathfrak{A}_6$ est simple et n'a donc pas de sous-groupes distingués. De façon plus élémentaire,
$$(1,2)(3,4)\circ(3,4)(1,5) = (1,2)(1,5) = (1,5,2)$$
et l'ensemble proposé n'est donc pas un sous-groupe.

2 Décrire les différentes possibilités pour la dimension de l'intersection de deux plans projectifs de $\mathbb{P}^3$. Décrire les différentes possibilités pour la dimension de l'intersection de deux plans projectifs de $\mathbb{P}^4$.

Solution : L'intersection de deux espaces vectoriels F et G de dimension 3 dans un espace vectoriel E de dimension 4 est un sous-espace vectoriel de dimension $\dim F+\dim G-\dim(F+G) = 6-\dim(F+G)$ avec $3 \leq \dim F+G \leq \min(\dim E, \dim F+\dim G) = 4$ donc soit 3, soit 2. L'intersection de deux plans projectifs de $\mathbb{P}^3$ est donc soit un plan projectif soit une droite projective.

L'intersection de deux espaces vectoriels F et G de dimension 3 dans un espace vectoriel E de dimension 5 est un sous-espace vectoriel de dimension $\dim F+\dim G-\dim(F+G) = 6-\dim(F+G)$ avec $3 \leq dim F+G \leq \min(\dim E, \dim F+\dim G) = 5$ donc soit 3, soit 2, soit 1. L'intersection de deux plans projectifs de $\mathbb{P}^3$ est donc soit un plan projectif, soit une droite projective, soit un point.

3 Donner l'exemple de deux quintuplets de points deux à deux distincts d'une droite projective qui ne peuvent pas être l'image l'un de l'autre par une homographie.

Solution : Comme une homographie est caractérisée par l'image d'un repère projectif, il suffit de prendre cinq points A, B, C, D E deux à deux distincts : il n'existe aucune homographie qui fixe A, B et C et qui échange D et E par exemple.

Sinon, On choisit un repère projectif et des coordonnées homogènes. Les points de coordonnées $A[1:0], B[0,1], C[1,1]$ et $D[2,1]$ ont pour birapport 2 alors que ceux de coordonnées $A[1:0], B[0,1], C[1,1]$ et $E[3,1]$ ont pour birapport 3. Par conséquent, pour tout point M les quintuplets
$$(A,B,C,D,M) \text{ et } (A,B,C,E,M)$$
ne sont images l'un de l'autre dans aucune homographie.

Exercice 2 (Sylow des groupes diédraux (6 points))

Soit $\mathcal{P}_n$ un polygone régulier à n côtés dans le plan euclidien orienté. On appelle groupe diédral D_n le groupe des isométries de $\mathcal{P}_n$.

1 Parmi les translations, les rotations, les symétries orthogonales, et les symétries glissées, décrire des isométries du plan qui conservent le polygone régulier $\mathcal{P}_n$.

Solution : On note O le centre de gravité de $\mathcal{P}_n$. Dans D_n, toutes les isométries, qui sont affines, conservent le centre de gravité. Il n'y a donc aucune translation ni symétrie glissée. Il y a les n rotations de centre O et d'angle $2\pi/n$ et si n est pair, les $n/2$ symétries orthogonales d'axe (OS) et les $n/2$ symétries d'axe médiateur d'un des n côtés et si n est impair les n symétries d'axe médiateur d'un des n côtés.

2 Déterminer, à l'aide de l'action naturelle de D_n sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{P}_n$, le cardinal de D_n. En déduire la liste complète des éléments de D_n.

Solution : On considère l'action de D_n sur l'ensemble fini des n sommets de $\mathcal{P}_n$. À l'aide des rotations de centre O et d'angle $2k\pi/n$, on montre que l'action est transitive. Le stabilisateur d'un sommet S est le sous-groupe d'ordre 2 engendré par la symétrie orthogonale d'axe (OS) où O est le centre du polygone. Par la seconde formule des classes, D_n est d'ordre $2n$. La liste précédente est donc complète.

3 On suppose n impair. Déterminer les 2-Sylow de D_n et vérifier (sans référence au cours) qu'ils sont conjugués.

Solution : Comme n est impair, les 2-Sylow sont d'ordre 2. Ce sont les sous-groupes engendrés par les symétries orthogonales. Si s est une symétrie d'axe d et r la rotation de centre O et d'angle $2k\pi/n$, rsr^{-1} est la symétrie d'axe $r(d)$. Comme n est impair, le groupe engendré par r agit transitivment sur les axes de symétrie. Toutes les symétries sont donc conjuguées.

4 On suppose $n = 6$. Déterminer un 2-Sylow de D_6. Ce 2-Sylow est-il distingué ?

Solution : Les 2-Sylow sont d'ordre 4 dans D_6 d'ordre $2^2 \times 3$. Le groupe engendré par deux symétries d'axe orthogonal (qui commutent) est d'ordre 4. En conjuguant par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/6$, on obtient un autre 2-Sylow. Les 2-Sylow ne sont donc pas distingués. Le nombre de 2-Sylow est congru à 1 modulo 2 et divise 12 et n'est pas 1. Il y a donc trois 2-Sylow.

Déterminer deux sous-groupes d'ordre 2 de D_6 non conjugués dans D_6.

Solution : La conjuguée, par une rotation d'angle $2k\pi/6$ ou par une symétrie, d'une symétrie d'axe médiateur d'un coté est une symétrie d'axe médiateur d'un coté. Les symétries d'axe médiateur d'un coté et les symétries d'axe passant par un sommet (qui diffèrent car 6 est pair) ne sont donc pas conjuguées dans D_6.

Donner un 3-Sylow de D_6.

Solution : Le sous-groupe engendré par une rotation d'angle $4\pi/6$ est d'ordre 3 et c'est un 3-Sylow.

Exercice 3 (Les groupes d'ordre 33 (6 points))

Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 33.

Solution : Les ordres des éléments de G sont $3, 11$ ou 33. Une application directe du théorème de Sylow montre qu'on a un seul groupe d'ordre 11 et un seul groupe d'ordre 3. Les éléments d'ordre 3 et 11 sont contenus dans ces deux groupes. On a au plus

$$1 + (3 - 1) + (11 - 1) = 1 + 2 + 10 = 13$$

éléments d'ordre 1, 3 ou 11. Il existe donc un élément d'ordre 33 dans G qui est donc cyclique isomorphe à $\mathbf{Z}/33\mathbf{Z}$.

Exercice 4 (Géométrie projective (5 points))

Soit $\Delta = P(E)$ une droite projective. Soient $F = P(f)$ et $F' = P(f')$ deux homographies de Δ dans elle-même telles que $F^2 \neq Id_\Delta$, $F'^2 \neq Id_\Delta$ et qui possèdent chacune exactement deux points fixes distincts.
On se propose de montrer que F et F' commutent si et seulement elles ont les mêmes points fixes. On note A et B les points fixes de F et on note A' et B' les points fixes de F'.
1 On suppose que F et F' ont les mêmes points fixes. Comment traduire cette hypothèse à l'aide des applications linéaires associées f et f' ? Montrer que F et F' commutent (on pourra considérer un repère projectif de Δ).

Solution : Dire que F et F' ont les mêmes points fixes revient dire que f et f' ont les mêmes directions propres $d_1 = vect(v_1)$ et $d_2 = vect(v_2)$. les matrices de f et f' dans la base (v_1, v_2) sont diagonales et donc commutent, ce qui implique que F et F' commutent.

Dans la suite de l'exercice, on montre l'implication réciproque : on suppose donc que F et F' commutent.
2 Rappeler la démonstration du fait qu'une homographie d'une droite projective dans elle-même possédant trois points fixes deux à deux distincts est l'identité.

Solution : Comme $dim(E) = 2$, un élément de $Gl(E)$ qui a trois directions propres distinctes est une homothétie et donc induit l'identité sur $P(E)$.

3 En considérant l'image par $F \circ F'$ des points A, B, A', B' montrer que $\{F'(A), F'(B)\} = \{A, B\}$ et que $\{F(A'), F(B')\} = \{A', B'\}$.

Solution : On utilise la commutativité : $F(F'(A)) = F \circ F'(A) = F' \circ F(A) = F'(A)$ donc $F'(A)$ est un point fixe de F. De même $F'(B)$ est un point fixe de F, $F(A')$ est un point fixe de F' et $F(B')$ est un point fixe de F'. On en déduit $\{F'(A), F'(B)\} = \{A, B\}$ et $\{F(A'), F(B')\} = \{A', B'\}$ puisque F et F' n'ont chacune que deux points fixes.

4 Supposons que $F(A') = A'$ et $F(B') = B'$, montrer que $\{A', B'\} = \{A, B\}$.

Solution : F n'a que deux points fixes (car $F \neq Id_\Delta$ puisque $F^2 \neq Id_\Delta$), comme A' et B' sont distincts (par hypothèse sur F') et sont fixés par F on a le résultat souhaité.

5 Supposons que $F(A') = B'$ et $F(B') = A'$, montrer que $\{A', B'\} = \{A, B\}$, et en déduire que ce second cas ne peut pas se produire.

Solution : F^2 ne possède que deux points fixes, puisque $F^2 \neq Id_\Delta$. Sous l'hypothèse, A' et B' sont des points fixes de F^2, distincts par hypothèse sur F', donc l'ensemble des points fixes de F^2 est $\{A', B'\}$. D'autre part A et B sont aussi fixés par F^2 puisque fixés par F et $A \neq B$ par hypothèse sur F, donc l'ensemble des points fixes de F^2 est $\{A, B\}$. Enfin, par transitivité de l'égalité, $\{A', B'\} = \{A, B\}$. On a ainsi obtenu une absurdité, puisqu'on a supposé que F échangeait A' et B' et qu'on a obtenu qu'elle les fixait.

6 Conclure.

Solution : On a donc toujours la situation envisagée en 4., et F et F' ont les mêmes points fixes.