

**Algèbre et Arithmétique 3***Contrôle continu*

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie...

Durée : 2 heures

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1

(4 points)

- 1 Soit G un groupe, e son élément neutre et a un élément de G et m un entier naturel tel $a^m = e$. Que peut-on dire de l'ordre de l'élément a ?
- 2 Donner la définition d'un idéal dans un anneau commutatif.
- 3 Quels sont les idéaux de l'anneau $(\mathbf{Z}, +, \times)$?
- 4 Le sous-ensemble $28\mathbf{Z} \cap 18\mathbf{Z}$ de \mathbf{Z} est-il un idéal de \mathbf{Z} ? Si oui, le déterminer.
- 5 Donner l'exemple de deux groupes finis de même ordre non isomorphes. Justifier le fait que les deux groupes choisis ne sont pas isomorphes.
- 6 Le groupe \mathfrak{S}_4 des permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$ est-il cyclique ? (justifier)

Exercice 2

(3 points)

- 1 L'entier -1601 est-il un représentant de la classe $[-7387]_{2893}$ de $\mathbf{Z}/2893\mathbf{Z}$?
- 2 Calculer l'élément 11^{329} dans $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 12.
- 3 La classe $[51]$ est-elle inversible dans l'anneau $\mathbf{Z}/131\mathbf{Z}$. Si oui, calculer son inverse dans $\mathbf{Z}/131\mathbf{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 130.

Exercice 3

(2 points)

- 1 Ecrire une relation de Bezout entre $X^2 + X + 1$ et $X^3 + X + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.
- 2 La classe du polynôme $X^2 + X + 1$ est-elle inversible dans l'anneau quotient $\mathbf{R}[X]/(X^3 + X + 1)$? Si oui, donner son inverse.

Exercice 4

(4 points)

- 1 Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})$?
- 2 À quel groupe le groupe $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})^\times$ des inversibles de l'anneau $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})$ est-il isomorphe ?

Exercice 5

(4 points)

Voici la table d'un groupe G . Quel est l'ordre de G ? Le groupe G est-il nécessairement commutatif? Compléter la table en énonçant précisément les propriétés utilisées.

*	a	b	c	d	e
a			d		c
b	e		a		d
c		a			
d				d	e
e			b		a

Exercice 6

(3 points)

- 1 Calculer les produits dans \mathfrak{S}_7 , $(1, 2)(1, 3)$ et $(1, 2)(2, 3)(1, 2)$.
- 2 L'ensemble des transpositions de \mathfrak{S}_7 est-il un sous-groupe de \mathfrak{S}_7 ?

Un corrigé sera disponible sur internet.