UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 3

Feuille n°6 : Exemples d'anneaux

Exercice 1

1 Soit $p = 13$. Trouver une racine c de -1 modulo 13.
2 Représenter le réseau $\mathcal{R}$ de $\mathbf{Z}^2$ engendré par $(c, 1)$ et $(p, 0)$ et montrer que tous ses éléments ont une norme multiple de p.
3 Trouver deux entiers x et y tels que $p = x^2 + y^2$.

Exercice 2

1 Le nombre 101 est-il premier ? Peut-il s'écrire comme somme de deux carrés.
2 Déterminer une racine c de -1 modulo 101.
3 Calculer le $pgcd(101, c + i)$ dans $\mathbf{Z}[i]$.
4 Ecrire 101 comme somme de deux carrés.
5 Mêmes questions avec 2011.

Exercice 3

1 Quelle identité obtient-on quand on écrit que la norme de $(a + ib)(c + id)$ dans $\mathbf{Z}[i]$ est le produit de la norme de $(a + ib)$ et de celle de $(c + id)$?
2 Écrire $2425 = 5^2 \cdot 97$ et $754 = 2 \cdot 13 \cdot 29$ comme sommes de deux carrés.
3 Tous les entiers naturels sont-ils sommes de trois carrés ?

Exercice 4

Considérons l'anneau $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$, le sous-anneaux de $\mathbf{C}$ engendré par $i\sqrt{3}$.
1 Montrer que $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}] := \{a + bi\sqrt{3},\ (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$.
2 À tout élément $x = a + bi\sqrt{3}$ de $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ on associe son conjugué $\overline{x} = a - bi\sqrt{3}$. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ on a

$$\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y} \quad \text{et} \quad \overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y}.$$

3 En considérant l'application $N : \mathbf{Z}[i\sqrt{3}] \to \mathbf{Z}, x \mapsto x\overline{x}$, montrer que les éléments inversibles de $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ sont exactement les éléments de norme 1. Donner la liste des éléments inversibles.
4 Quelles sont les normes possibles d'un diviseur de $1 + i\sqrt{3}$ dans $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$?
5 Montrer que éléments 2, $1 + i\sqrt{3}$ sont premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$. Peut-on leur écrire un couple de Bezout ?
6 Donner deux factorisations différentes de 4 dans $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$. Le lemme d'Euclide est-il valide dans l'anneau $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$?

Exercice 5

Les polynômes symétriques élémentaires en n indéterminées sont par définition

$$\begin{aligned} s_1(t_1, t_2, \cdots, t_n) &:= t_1 + t_2 + \cdots + t_n \\ s_2(t_1, t_2, \cdots, t_n) &:= t_1t_2 + t_1t_3 + \cdots + t_2t_3 + t_2t_4 + \cdots + \cdots t_{n-1}t_n \\ &\vdots \\ s_n(t_1, t_2, \cdots, t_n) &:= t_1t_2 \cdots t_n. \end{aligned}$$

1 Soit $F(X) = a(X - t_1)(X - t_2) \cdots (X - t_n)$. Développer $F(X)$ en puissances de X.
2 Ecrire $t_1^3 + t_2^3$ comme polynôme à coefficients entiers de s_1, s_2.
3 Ecrire $t_1^4 + t_2^4$ comme polynôme à coefficients entiers de s_1, s_2.
4 Ecrire $t_1^3 + t_2^3 + t_3^3$ comme polynôme à coefficients entiers de s_1, s_2, s_3.
5 Ecrire f

$$f(t_1, t_2, t_3) = t_1^2t_2 + t_1^2t_3 + t_2^2t_1 + t_2^2t_3 + t_3^2t_1 + t_3^2t_2.$$

comme polynôme à coefficients entiers en les polynômes symétriques élémentaires.

Exercice 6

Écrire en base 10 le nombre dont l'écriture hexadécimale est $DA582$.

Exercice 7

Calculer $P(2)$ où $P = 3x^4 - x^2 - 16x - 14$ par la méthode de Hörner. Effectuer la division euclidienne de P par $x - 2$.

Exercice 8

Le but de l'exercice est de factoriser le polynôme $x^4 + 4x^3 - 81x^2 - 16x + 308$.
1 Vérifier que 2 est racine de P et factoriser P par $x - 2$ avec la méthode de Hörner.
2 Vérfier que -2 est racine du quotient obtenu dans la question précédente et factoriser le par $x + 2$ par la méthode de Hörner.
3 Conclure.

Exercice 9

Soit $P = 3x^5 - 6x^4 + x^3 + 5x^2 - 3x - 4$.
1 Effectuer la division euclidienne de P par $x - 1$.
2 Présenter les résultats selon la méthode de Hörner.
3 Écrire P dans la base $1, (x - 1), (x - 1)^2, \cdots (x - 1)^5$.

Exercice 10

Le but de l'exercice est de déterminer une valeur approchée de la racine cubique réelle c de 17. On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 17$.
1 Montrer que $2 < c < 3$.
2 Déterminer par la méthode de Hörner le polynôme $R(z) := 10^3P(2 + \frac{z}{10})$ en la variable z.
3 Déterminer une valeur approchée de c à 10^{-1} près.
4 Déterminer une valeur approchée de c à 10^{-2} près. (réponse : $2,57 < c < 2,58$.)