UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 3

Feuille n°5 : Groupes finis

Exercice 1

Montrer que tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Exercice 2

Montrer que les deux permutations $\tau = (1, 2)$ et $c = (1, 2, 3)$ engendrent le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$. On pourra construire un arbre dont Id est la racine et tel qu'en chaque noeud partent deux branches, l'une marquée τ, l'autre c.

Exercice 3

1 Donner la liste des permutations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$.
2 Les deux permutations $\tau = (1, 3)$ et $c = (1, 2, 3, 4)$ engendrent-elles le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$?

Exercice 4

1 Construire à la règle et au compas un hexagone régulier E.
2 Une translation de vecteur non nul peut-elle conserver globalement l'hexagone E ?
3 Quels sont les centres et les angles des rotations du plan euclidien orienté qui conservent globalement l'hexagone E ?
4 Quelles sont les symétries orthogonales du plan euclidien orienté qui conservent globalement l'hexagone E ?
5 Quelles sont les symétries orthogonales glissées du plan euclidien orienté qui conservent globalement l'hexagone E ?
6 Soit r une rotation d'angle minimal non nul qui conserve globalement l'hexagone E et s une symétrie orthogonale qui conserve globalement E. Quel est l'ordre de r ? et celui de s ?
7 Écrire r comme composée de s suivie d'une autre symétrie orthogonale. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques (centre, axe, angle...) de l'isométrie rs.
8 Donner la liste des éléments du groupe D_{12} des isométries du plan euclidien orienté qui conservent globalement l'hexagone E. On n'utilisera dans les notations seulement une rotation r et une symétrie s.
9 À l'aide de l'écriture de r comme composée de deux symétries, calculer sr.
10 En déduire les produits $rsrs$, rsr^2s, r^3sr^4s.

Exercice 5

1 Montrer que le groupe $GL_2(\mathbb{F}_2)$ des matrices inversibles de taille 2×2 à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est un groupe de cardinal $(2^2 - 1)(2^2 - 2) = 6$.
2 On a vu en cours que tout groupe d'ordre 6 est isomorphe soit au groupe cyclique $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, soit au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ et que ces deux groupes ne sont pas isomorphes. Au quel de ces deux groupes, le groupe $GL_2(\mathbb{F}_2)$ est-il isomorphe ?