

## Retour sur la feuille précédente

### Exercice 1

---

- 1 Donner la définition d'un groupe.
- 2 Dire si les couples suivants sont des groupes :  $(\mathbf{Z}, +)$ ;  $(\mathbf{Z}, \times)$ ;  $(\mathbf{C}^*, +)$ ;  $(\mathbf{C}^*, \times)$ . Lorsque la réponse est "non", on indiquera une propriété des groupes qui fait défaut (on ne demande pas de justification lorsque la réponse est "oui").
- 3 Quels sont les idéaux de l'anneau  $(\mathbf{Z}, +, \times)$  ?
- 4 Quels sont les idéaux de l'anneau  $(\mathbf{R}[X], +, \times)$  ?

### Exercice 2

---

- 1 L'entier 51606 appartient-il à  $2569 + 247\mathbf{Z}$  ?
- 2 L'entier  $-1601$  est-il un représentant de la classe  $[-7387]_{2893}$  de  $\mathbf{Z}/2893\mathbf{Z}$  ?
- 3 Calculer l'élément 2169 dans  $\mathbf{Z}/17\mathbf{Z}$ . Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 16.
- 4 Calculer l'élément  $11^{329}$  dans  $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$ . Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 12.

### Exercice 3

---

On note  $\mathbb{F}_{11}$  le corps fini  $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$ . Considérons le groupe  $(\mathbb{F}_{11})^\times$ . Quels sont les ordres possibles d'un élément de ce groupe ? Combien d'éléments de chaque ordre ce groupe possède-t-il ? Déterminer tous les générateurs de ce groupe.

## Exercices à savoir faire

### Exercice 4

---

1. Déterminer la liste des inversibles de  $\mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$ . Déterminer l'ordre de chaque élément dans  $(\mathbf{Z}/15\mathbf{Z})^\times$ .
2. Déterminer la liste des inversibles de  $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ . Déterminer l'ordre de chaque élément dans  $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^\times$ .
3. Donner un isomorphisme de groupes de  $(\mathbf{Z}/15\mathbf{Z})^\times$  dans  $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^\times$ .

### Exercice 5

---

1. Le polynôme  $(X^2 + X + 1)^3$  est-il irréductible dans  $\mathbb{F}_2[X]$  ?
2. Donner la liste des polynômes irréductibles de  $\mathbb{F}_2[X]$  de degré 2 et 3.
3. Donner un polynôme irréductible de degré 4 de  $\mathbb{F}_2[X]$ .
4. Ecrire dans  $\mathbb{F}_2[X]$ , une relation de Bezout pour  $X^3 + X^2 + 1$  et  $X^2 + X + 1$ .

### Exercice 6

---

1. Combien le corps  $\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$  a-t-il d'éléments?
2. Déterminer la liste des éléments et la table de multiplication de l'anneau quotient

$$\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1).$$

3. Multiplier  $[X^5 + X^4 + 6X]$  par  $[X^4 + 7X^5 + 9X^3 + 4X^2]$  dans  $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$  et donner le résultat avec un représentant de la liste précédente.
4. Déterminer un inverse de  $[X^3 + X^2 + 1]$  dans  $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$ .

### Exercice 7

---

Résoudre dans  $\mathbf{R}[X]$  le système de congruences

$$\begin{cases} P &= X & [X^2 + X + 1] \\ P &= 3 & [X^2 + X] \end{cases}$$

### Exercice 8

---

1. Le polynôme  $X^2 + 1$  est-il irréductible dans  $\mathbb{F}_3[X]$  ?
2. Quelle est alors la structure de l'ensemble quotient  $A = \mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1)$  ?
3. Quelle relation vérifie la classe  $\alpha$  du polynôme  $X$  dans ce quotient ?
4. Donner la liste des éléments de  $A$ .
5. Déterminer l'ordre multiplicatif de  $\alpha$  dans  $A^\times$ .
6. Déterminer l'ordre multiplicatif de  $a := \alpha + 2$  dans  $A^\times$ .
7. Etablir la table des puissances de  $a$ .
8. Calculer  $(2 + a)(2 + 2a)$ .
9. Calculer  $a^3 + a^2$  comme puissance de  $a$ .
10. Calculer  $(1 + 2a)^{-1}$ .

### Exercice 9

---

1. Montrer que le polynôme  $X^3 + X + 1$  est irréductible dans  $\mathbb{F}_2[X]$ .
2. Quelle est alors la structure de l'ensemble quotient  $A = \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$  ?
3. Quel est le cardinal de  $A$  ? Soit  $\alpha$  la classe du polynôme  $X$  dans ce quotient  $A$ . Donner la liste des éléments de  $A$ .
4. Sans calculs, mais en justifiant votre réponse, dire ce que valent les quantités suivantes

$$\alpha + \alpha, \quad \alpha^3 + \alpha + 1, \quad \alpha^7.$$

5. Déterminer l'ordre multiplicatif de  $\alpha$  dans  $A^\times$ .
6. Etablir la table des puissances de  $\alpha$ .
7. Calculer  $(1 + \alpha)(1 + \alpha^2)$ .
8. Calculer  $\alpha^3 + \alpha^2$  comme puissance de  $\alpha$ .
9. Calculer  $(1 + \alpha)^{-1}$ .