

Retour sur la feuille précédente

Exercice 1

- 1 Donner la définition d'un groupe.
- 2 Dire si les couples suivants sont des groupes : $(\mathbf{Z}, +)$; (\mathbf{Z}, \times) ; $(\mathbf{C}^*, +)$; (\mathbf{C}^*, \times) . Lorsque la réponse est "non", on indiquera une propriété des groupes qui fait défaut (on ne demande pas de justification lorsque la réponse est "oui").
- 3 Quels sont les idéaux de l'anneau $(\mathbf{Z}, +, \times)$?
- 4 Quels sont les idéaux de l'anneau $(\mathbf{R}[X], +, \times)$?

Exercice 2

- 1 L'entier 51606 appartient-il à $2569 + 247\mathbf{Z}$?
- 2 L'entier -1601 est-il un représentant de la classe $[-7387]_{2893}$ de $\mathbf{Z}/2893\mathbf{Z}$?
- 3 Calculer l'élément 2169 dans $\mathbf{Z}/17\mathbf{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 16.
- 4 Calculer l'élément 11^{329} dans $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 12.

Exercice 3

On note \mathbb{F}_{11} le corps fini $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$. Considérons le groupe $(\mathbb{F}_{11})^\times$. Quels sont les ordres possibles d'un élément de ce groupe ? Combien d'éléments de chaque ordre ce groupe possède-t-il ? Déterminer tous les générateurs de ce groupe.

Exercices à savoir faire

Exercice 4

1. Déterminer la liste des inversibles de $\mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$. Déterminer l'ordre de chaque élément dans $(\mathbf{Z}/15\mathbf{Z})^\times$.
2. Déterminer la liste des inversibles de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$. Déterminer l'ordre de chaque élément dans $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^\times$.
3. Donner un isomorphisme de groupes de $(\mathbf{Z}/15\mathbf{Z})^\times$ dans $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^\times$.

Exercice 5

1. Le polynôme $(X^2 + X + 1)^3$ est-il irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$?
2. Donner la liste des polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_2[X]$ de degré 2 et 3.
3. Donner un polynôme irréductible de degré 4 de $\mathbb{F}_2[X]$.
4. Ecrire dans $\mathbb{F}_2[X]$, une relation de Bezout pour $X^3 + X^2 + 1$ et $X^2 + X + 1$.

Exercice 6

1. Combien le corps $\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ a-t-il d'éléments?
2. Déterminer la liste des éléments et la table de multiplication de l'anneau quotient

$$\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1).$$

3. Multiplier $[X^5 + X^4 + 6X]$ par $[X^4 + 7X^5 + 9X^3 + 4X^2]$ dans $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$ et donner le résultat avec un représentant de la liste précédente.
4. Déterminer un inverse de $[X^3 + X^2 + 1]$ dans $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbf{R}[X]$ le système de congruences

$$\begin{cases} P &= X & [X^2 + X + 1] \\ P &= 3 & [X^2 + X] \end{cases}$$

Exercice 8

1. Le polynôme $X^2 + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$?
2. Quelle est alors la structure de l'ensemble quotient $A = \mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1)$?
3. Quelle relation vérifie la classe α du polynôme X dans ce quotient ?
4. Donner la liste des éléments de A .
5. Déterminer l'ordre multiplicatif de α dans A^\times .
6. Déterminer l'ordre multiplicatif de $a := \alpha + 2$ dans A^\times .
7. Etablir la table des puissances de a .
8. Calculer $(2 + a)(2 + 2a)$.
9. Calculer $a^3 + a^2$ comme puissance de a .
10. Calculer $(1 + 2a)^{-1}$.

Exercice 9

1. Montrer que le polynôme $X^3 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.
2. Quelle est alors la structure de l'ensemble quotient $A = \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$?
3. Quel est le cardinal de A ? Soit α la classe du polynôme X dans ce quotient A . Donner la liste des éléments de A .
4. Sans calculs, mais en justifiant votre réponse, dire ce que valent les quantités suivantes

$$\alpha + \alpha, \quad \alpha^3 + \alpha + 1, \quad \alpha^7.$$

5. Déterminer l'ordre multiplicatif de α dans A^\times .
6. Etablir la table des puissances de α .
7. Calculer $(1 + \alpha)(1 + \alpha^2)$.
8. Calculer $\alpha^3 + \alpha^2$ comme puissance de α .
9. Calculer $(1 + \alpha)^{-1}$.