**Algèbre et Arithmétique 3**

*Feuille n° 3 : Anneaux de polynômes*

# 1 Exercices sur les cours précédents

## Exercice 1

Dans l'anneau $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, calculer $(a+b)^3$ où $a$ et $b$ sont deux éléments.
Dans l'anneau $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, calculer $(a+b)^6$ où $a$ et $b$ sont deux éléments.
Dans l'anneau $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$, calculer $(a+b)^7$ où $a$ et $b$ sont deux éléments.

## Exercice 2

**1** 20606 appartient-il à $14443 + 3079\mathbf{Z}$ ?
**2** Calculer l'élément 2169 dans $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 12.
**3** Considérons une application $f : \mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, qui envoie $x$ sur $x^3$. Est-elle injective ?
**4** $[2]_{26}$ est-il un diviseur de $[0]$ dans $\mathbf{Z}/26\mathbf{Z}$ ?
**5** $187489 = 433^2$, où 433 est un nombre premier. Combien de diviseurs de zéro y a-t-il dans $\mathbf{Z}/187489\mathbf{Z}$ ?
**6** Déterminer les puissances de 2 modulo 9. Que dire du groupe $(\mathbf{Z}/9\mathbf{Z})^\times$ ?

## Exercice 3

Voici la table d'un groupe fini. Déterminer l'ordre de $a$.

| $*$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ |
| $b$ | $d$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $d$ | $b$ | $c$ | $d$ | $a$ |

# 2 Exercices à savoir faire

## Exercice 4

Soit $D : \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X]$ l'application de dérivation.
Est-ce un morphisme de groupes ? Un morphisme d'anneaux ? Une application linéaire ?

## Exercice 5

Déterminer le pgcd et le ppcm des polynômes $X^5-3X^4+X^3+2X^2-6X+2$ et $X^4-3X^3+3X-1$, éléments de $\mathbf{Q}[X]$.

### Exercice 6

Soient $P = X^3 - 1$ et $Q = X^2 - 3X + 2$ des éléments de $\mathbf{R}[X]$. Quel est l'idéal de $\mathbf{R}[X]$ engendré par $P$ ? L'idéal engendré par $P$ et $Q$ ? L'idéal $(P) \cap (Q)$ ?

### Exercice 7

Soit $K$ un corps, et $P \in K[X]$. Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

**1** Si $P$ n'a pas de racine dans $K$, alors $P$ est irréductible.

**2** Si $P$ est irréductible, alors $P$ n'a pas de racine dans $K$.

### Exercice 8

Soit $P = X^4 + 1 \in \mathbf{C}[X]$.

**1** De quelle forme sont les polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ ? Factoriser $P$ en produit d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$.

**2** De quelle forme sont les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ ? Factoriser $P$ en produit d'irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.

**3** Montrer que $P$ ne peut pas se factoriser en produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients rationnels (on pourra supposer que c'est possible, et écrire la division euclidienne de $P$ par l'un de ces facteurs). En déduire que $P$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

### Exercice 9

**1** Soit $n$ un entier naturel non nul et $d$ un diviseur de $n$. Montrer que $X^d - 1$ divise $X^n - 1$.

**2** Soit $n$ un entier naturel non nul. Soit $d$ un entier naturel non nul et $r$ le reste de la division euclidienne de $n$ par $d$. Montrer que $X^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^d - 1$.

**3** Soient $m, n \in \mathbf{N}^*$, et $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$. Montrer que $\mathrm{pgcd}(X^m - 1, X^n - 1) = X^d - 1$.

### Exercice 10

Déterminer les racines de $X^2 - 1$ dans $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$. Comparer leur nombre au degré du polynôme. Comment expliquer ce phénomène ?

## 3 Exercices à chercher

### Exercice 11

Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbf{Z}[X]$. On veut déterminer si $P$ a des racines rationnelles.

**1** On suppose que $P$ a une racine rationnelle non nulle $x$, avec $x = \frac{p}{q}$ et $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$. Montrer que $p$ divise $a_0$ et $q$ divise $a_n$.

**2** Le polynôme $7X^3 - 5X^2 - 9X + 4$ a-t-il des racines rationnelles ? et $X^4 - 2X^2 - 3$ ?

**3** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n}$ est soit un entier, soit un irrationnel.

### Exercice 12

Montrer que $X^2 + 4$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$ mais réductible dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]$.