Théorie spectrale dans les espaces euclidiens et hermitiens

On ne travaillera que sur des espaces vectoriels de dimension finie.

1. Endomorphismes dans les espaces euclidiens et hermitiens

Soit E un espace vectoriel réel euclidien (resp.complexe hermitien). On notera $< \ , \ >$ le produit scalaire (resp. le produit scalaire hermitien, sesquilinéaire par rapport à la seconde variable.)

1.1. Prolongement complexe. — Le prolongement complexe d'un espace vectoriel réel E est l'espace vectoriel complexe $E^c = E \oplus iE$. Le prolongement complexe d'un endomorphisme f de E est l'endomorphisme f^c de E^c défini par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f^c(x+iy) = f(x) + if(y).$$

Si E est euclidien, le produit scalaire se prolonge en un produit hermitien (noté $< \ , \ >_{E^c}$) sur E^c par

$$\forall (x,y) \in E^2, < x+iy, x'+iy' >_{E^c} = (< x,x' > + < y,y' >) + i(< y,x' > - < x,y' >).$$

Montrer que f et f^c ont même polynôme caractéristique.

1.2. Adjoints des endomorphismes dans les espaces euclidiens et hermitiens. — Soit f est un endomorphisme de E son *adjoint* est l'unique endomorphisme $f^\star$ de E tel que

$$\forall (x,y) \in E,\ < x, f(y) > = < f^\star(x), y > .$$

Quel argument permet de justifier l'existence et l'unicité de l'adjoint ? Dans une base orthonormée de E, déterminer la matrice de $f^\star$ en fonction de celle de f.

Montrer que si F est un sous-espace stable par f, alors $F^\perp$ est stable par $f^\star$.

Un endomorphisme est dit *normal* s'il commute avec son adjoint. Un endomorphisme d'un espace euclidien est dit *symétrique* s'il est égal à son adjoint. Un endomorphisme d'un espace euclidien (resp.hermitien) est dit *orthogonal (resp. unitaire)* si

$$\forall (x,y) \in E,\ < f(x), f(y) > = < x, y > .$$

Montrer que si f est diagonalisable dans une base orthonormée, il est normal. Montrer que si f est orthogonal ou unitaire, il est inversible et normal.

1.3. Théorie spectrale. —

1.3.1. Endomorphismes normaux des espaces hermitiens. — Montrer que si f est normal dans un espace hermitien alors pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|f^\star(x)\|$. En déduire alors que si x est vecteur propre de f, il est aussi vecteur propre de $f^\star$. Montrer que si x et y sont vecteurs propres de f pour des valeurs propres distinctes, alors ils sont orthogonaux. Énoncer et démonter un théorème de réduction des endomorphismes normaux des espaces hermitiens. Que peut-on dire de plus dans le cas des endomorphismes auto-ajoints ? des endomorphismes unitaires ?

Montrer que les valeurs propres des endomorphismes anti-symétriques des espaces euclidiens sont nulles. Pourquoi ne peut-on pas reproduire le raisonnement précédent dans ce cas ?

1.3.2. Endomorphismes symétriques. — Montrer que les racines complexes du polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique sont réelles. Montrer que si x et y sont vecteurs propres de f pour des valeurs propres distinctes, alors ils sont orthogonaux. Énoncer et démontrer un théorème de réduction des endomorphismes symétriques.

Donner l'exemple d'une matrice symétrique complexe 2×2 non-nulle de trace nulle de déterminant nul. Est-elle diagonalisable ? Quelle partie du raisonnement précédent n'est pas valide dans le cas des espaces hermitiens.

1.3.3. Endomorphismes orthogonaux. — Montrer que les valeurs propres d'un endomorphisme orthogonal sont de module 1. Montrer qu'un endomorphisme orthogonal admet un espace stable de dimension 1 ou 2. Énoncer un théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux.

2. Formes quadratiques et formes hermitiennes

Soit k un corps de caractéristique différente de 2.

2.1. Existence de base Q-orthogonales. — Soit Q une forme quadratique sur un k espace vectoriel et x un vecteur de E tel que $Q(x) \neq 0$. Montrer que $E = kx \oplus^{\perp} x^{\perp}$. En déduire l'existence que base Q-orthogonale.

2.2. Réduction de Gauss. — Soit Q une forme quadratique sur un k-espace vectoriel E de dimension n exprimée dans une base sous la forme $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} B_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} B_{ij}x_ix_j$. Montrer qu'il existe un entier r inférieur à n, r éléments λ_i de k et r formes linéaires indépendantes tels que

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i l_i(x)^2.$$

On pourra étudier le cas où il existe un terme carré non nul, par exemple $B_{11}x_1^2$, et dans l'autre cas utiliser les identités avec $x'' = (x_3, \cdots x_n)$,

$$\begin{aligned} &x_1x_2 + x_1l(x'') + x_2m(x'') + r(x'') = (x_1 + m(x''))(x_2 + l(x'')) + R(x'') \\ &= \frac{1}{4}(x_1 + m(x'') + x_2 + l(x''))^2 - \frac{1}{4}(x_1 + m(x'') - x_2 - l(x''))^2 + R(x''). \end{aligned}$$

Cet algorithme fournit donc une matrice m à r lignes et n colonnes telle que

$$\begin{bmatrix} l_1(x) \\ l_2(x) \\ \vdots \\ l_r(x) \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

On peut compléter m en une matrice M carrée d'ordre n avec $M = \begin{bmatrix} m \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}$. Montrer que le système des vecteurs colonnes $(V_1, V_2, \cdots V_n)$ de M^{-1} est une base Q-orthogonale de E et

$$Q(\sum_{i=1}^{n} x_i' V_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (x_i')^2.$$

Trouver une base Q-orthogonale pour la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$, $Q = x^2 + 2xz + 4yt$.

2.3. Réduction des formes quadratiques sur des espaces euclidiens. — Soit Q un forme quadratique sur un espace euclidien $(E, <\ ,\ >)$ de forme bilinéaire symétrique associée B_Q. Montrer qu'il existe une unique application f_Q de E telle que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ B_Q(x,y) = < x, f_Q(y) > .$$

Montrer que f_Q est linéaire et symétrique. Montrer qu'une base orthonormée de diagonalisation de f_Q fournit une base orthonormée pour le produit scalaire et Q-orthogonale. Énoncer la propriété analogue sur les formes hermitiennes des espaces hermitiens.

---

15 décembre 2009

CHRISTOPHE MOUROUGANE