Université de Rennes 1
UFR mathématiques
Master 1

Examen terminal de Théorie des nombres
(Jean-Pierre Escofier)
17 décembre 2008

Barême envisagé : 6 points pour l'exercice I ; 14 points pour l'exercice II.
Documents de cours et de TD autorisés. Calculatrices non autorisées.
Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de la rédaction.

I- On pose $\alpha = \sqrt{41}$; on note K le corps $\mathbb{Q}[\alpha]$ et A l'anneau des entiers algébriques de K.

1) Décrire les éléments de A.
2) Déterminer le développement de α en fraction continue.
3) En déduire une solution en nombres entiers de l'équation

$$x^2 - 41y^2 = -1.$$

4) Trouver, à partir de la solution trouvée dans la question précédente, une solution en nombres entiers de l'équation

$$x^2 - 41y^2 = 1.$$

5) Décrire l'ensemble $A^\times$ des unités de A.

Tournez la page pour l'exercice II.

II-

1) Calculer les symboles de Legendre $\left(\dfrac{6}{p}\right)$ pour $p = 29, 31, 43, 47, 73$.
2) Soit p un nombre premier, $p \geqslant 6$. Quelles sont les seules valeurs que peut prendre $p \bmod 24$?
3) On note E l'ensemble des nombres premiers tels que $\left(\dfrac{-6}{p}\right) = 1$ et F l'ensemble des nombres premiers tels que $\left(\dfrac{-6}{p}\right) = -1$. Déterminer E et F à l'aide de congruences modulo 24.
4) Montrer que si $p \in E$, alors p est représenté proprement par une forme quadratique réduite

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

de discriminant 6.
5) Déterminer, à l'aide de la description donnée en cours, les formes quadratiques définies positives réduites de discriminant 6.
On les notera q_1 et q_2.
6) Montrer que E se décompose en deux sous-ensembles :
• l'ensemble des p tels que p soit représenté proprement par q_1 ;
• l'ensemble des p tels que p soit représenté proprement par q_2.
7) On peut, bien sûr, trouver directement par essais successifs une solution en nombres entiers de $x^2 + 6y^2 = 73$; on demande de montrer comment le théorème de Minkowski permet de retrouver cette solution.